

دستیابی به مقدار انتقال جرم صورت گرفته در هر لحظه و ضریب انتقال جرم
انتقال جرم متوسط صورت گرفته در طول زمان θ ،

$$N_{AZ} = -D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial z} \bigg|_{z=0}^{\theta=\theta} = \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi\theta}} (C_A^f - C_A)$$

$$\bar{N}_{AZ} = \left(\int_0^\theta N_{AZ} d\theta \right) / \int_0^\theta d\theta = 2 \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi\theta}} (C_A^f - C_{A0})$$

این مقدار انتقال جرم متوسط صورت گرفته را می توان با استفاده از ضریب انتقال جرم متوسط و نیروی محرکه بیان نمود،

$$\bar{N}_{AZ} = \bar{k}_{av} (C_A^f - C_{A0})$$

از مقایسه دو مقدار فوق،

$$\bar{k}_{av} = 2 \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi\theta}}$$

حل معادله PDE فوق به روش لاپلاس معکوس نیز ممکن است (جزئیات حل در ضمیمه ۴-۷) و نتایج نهایی به صورت زیر ارائه شده است.

$$\frac{C_A - C_{A_0}}{C_A^* - C_{A_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{erfc} \frac{(2n+1)a - Z}{2\sqrt{D\theta}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{erfc} \frac{(2n+1)a + Z}{2\sqrt{D\theta}}$$

$$\frac{\bar{C}_A - C_{A_0}}{C_A^* - C_{A_0}} = E = 2 \sqrt{\frac{D\theta}{a^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{ierfc} \frac{na}{\sqrt{D\theta}} \right]$$

نفوذ و انتقال جرم در قطعه جامد، در چند بعد و در حالت غیریکنواخت:

قطعه جامد مکعب مستطیل شکلی را در نظر بگیرید که ضخامت آن در جهت X و Y نسبتاً زیاد است، لیکن می‌توان ضخامت جهت Z را نادیده گرفت. حال به بررسی انتقال جرم در چنین سیستمی در دو جهت X و Y می‌پردازیم. می‌توان فرض کرد که انتقال جرم به درون قطعه یا از قطعه به بیرون صورت می‌گیرد. بنابراین تغییرات غلظت در دو جهت X و Y با زمان وجود دارد پس می‌توان نوشت:

$$C_A = C_A(x, y, \theta)$$

غلظت جزء A انتقالی، تابعی از x و y و θ است.

$$C_A = C_{A1}(x, \theta) C_{A2}(y, \theta)$$

فرض می‌شود:

با توجه به آنچه که قبلاً نیز اشاره شد (بیان جرمی در حالتی که انتقال جرم در یک بعد و براساس تئوری هگبی داشتیم):

$$D_{AB} \frac{\partial^2 C_{A1}}{\partial x^2} = \frac{\partial C_{A1}}{\partial \theta}$$

$$D_{AB} \frac{\partial^2 C_{A2}}{\partial y^2} = \frac{\partial C_{A2}}{\partial \theta}$$

اگر غلظت اولیه در قطعه جامد C_{A0} و غلظت در حال تعادل C_A^f باشد، با استفاده از روابط فوق الذکر و با جایگذاری لازم می توان نشان داد که،
(جزئیات در ضمیمه ۴-۸)

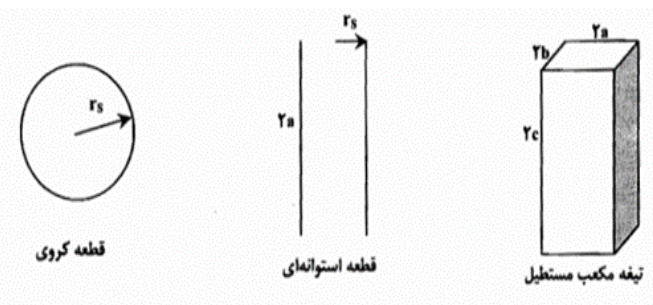
$$\underbrace{\frac{C_A - C_{A0}}{C_A^f - C_{A0}}}_{\text{راندمان کلی}} = \underbrace{\frac{C_{A1} - C_{A0}}{C_A^* - C_{A0}}}_{\text{راندمان انتقال جرم در جهت y}} \times \underbrace{\frac{C_A - C_{A0}}{C_A^f - C_{A0}}}_{\text{راندمان انتقال جرم در جهت x}}$$

بنابراین:

$$E_{\text{کل}} = E_x \cdot E_y$$

راندمان در قطعات مسطح، استوانه‌ای و کروی

شکل قطعه	جهت انتقال جرم	E
کروی	از سطح خارجی	$E_{sph} = f \left(\frac{D\theta}{r_s^2} \right)$
استوانه	فقط از سطح جانبی	$E_{cyl} = f \left(\frac{D\theta}{r_s^2} \right)$
استوانه پائینی	از سطح جانبی و یکی از دو سطح بالایی یا پائینی	$E = E_{cyl} \cdot E_{slab} = f_1 \left(\frac{D\theta}{r_s^2} \right) \cdot f_2 \left(\frac{D\theta}{(2a)^2} \right)$
استوانه	از سطح جانبی و هر دو سطح بالا و پائین	$E = E_{cyl} \cdot E_{slab} = f_1 \left(\frac{D\theta}{r_s^2} \right) \cdot f_2 \left(\frac{D\theta}{a^2} \right)$
تیغه	از یک سطح (مثلاً سطح bc)	$E = E_{slab} = f \left(\frac{D\theta}{(2a)^2} \right)$
تیغه	از دو سطح (از دو سطح bc در دو طرف)	$E = E_{slab} = f \left(\frac{D\theta}{a^2} \right)$
تیغه	از چهار سطح (دو سطح bc و دو سطح ac)	$E = E_{slab1} \cdot E_{slab2} = f_1 \left(\frac{D\theta}{a^2} \right) \cdot f_2 \left(\frac{D\theta}{b^2} \right)$
تیغه	از ۶ سطح	$E = E_{slab1} \cdot E_{slab2} \cdot E_{slab3}$ $= f_1 \left(\frac{D\theta}{a^2} \right) \cdot f_2 \left(\frac{D\theta}{b^2} \right) \cdot f_3 \left(\frac{D\theta}{c^2} \right)$



مثال: خاک رنگبر مورد استفاده در صنعت روغن خوراکی، حاوی مقداری روغن است. هدف جداسازی روغن موجود در این خاک با حلال تتراکلرواتیلن می‌باشد. روغن

موجود در خاک $\frac{0.12kg}{\text{یک کیلو گرم خاک خشک}}$ گزارش شده است. استفاده از حلال خالص به مدت ۱.۵ ساعت مقدار روغن را در نمونه‌ای از خاک به $\frac{0.5kg}{\text{یک کیلو گرم خاک خشک}}$ کاهش داده است. خاک را کروی با قطر 2mm فرض نمایید. مطلوبست ضریب نفوذ موثر روغن در خاک رنگبر.

حل: فرض می‌کنیم با خروج روغن از خاک رنگبر، حجم خاک تغییر نکند،

$$C_A = \frac{m_A/M_A}{V} \quad \text{غلظت روغن موجود در خاک (V حجم خاک)}$$

$$\frac{\bar{C}_A - C_A^*}{C_{A_0} - C_A^*} = \frac{\bar{m}_A - m_A^*}{m_{A_0} - m_A^*} = \frac{\frac{\bar{m}_A}{m_B} - \frac{m_A^*}{m_B}}{\frac{m_{A_0}}{m_B} - \frac{m_A^*}{m_B}} = \frac{X_A - X_A^*}{X_{A_0} - X_A^*} = \frac{0.05 - 0}{0.12 - 0} = 0.417$$

$$\frac{D\theta}{r_S^2} = 0.042 \quad \text{با استفاده از شکل}$$

ضریب نفوذ موثر.

$$D_{eff} = 0.042 \times \frac{(2 \times 10^{-3}/2)^2}{1.5 \times 3600} = 7.78 \times 10^{-12} \frac{m^2}{s}$$

مثال: جریان هوا در 20°C با رطوبت بسیار کم و ثابت به دو سطح دیواره خاکی (خاک رس) وزیده می‌شود. رطوبت اولیه خاک، ۱۵ درصد و در سرتاسر خاک یکنواخت می‌باشد. ضخامت دیواره ۲ اینچ و لبه‌ها در مقابل انتقال جرم عایق‌بندی شده‌اند. سرعت خشک کردن توسط مکانیزم نفوذ رطوبت در دیواره کنترل می‌شود. مطلوبست ضریب نفوذ مؤثر رطوبت از خاک وقتی که رطوبت پس از ۳۷۵ دقیقه به ده درصد برسد. رطوبت تعادلی در شرایط دمای مسئله درون خاک رس ۲ درصد جرمی است. برای هریک از قطعات زیرین، مقدار رطوبت نهایی را پس از ۲۵ ساعت بدست آورید. رطوبت اولیه در قطعات زیرین همان مقدار ۱۵ درصد می‌باشد.

الف- قطعه کروی جامد با قطر ۶ اینچ.

ب- قطعه استوانه‌ای که دو قاعده آن در مقابل انتقال جرم غیرقابل نفوذ بوده و طول قطعه ۱۰ اینچ و قطر آن ۸ اینچ باشد.

ج- قطعه استوانه‌ای فوق‌الذکر اگر فقط یک قاعده آن عایق‌بندی شده باشد.

د- قطعه استوانه‌ای قسمت ب اگر هیچیک از قاعده‌های آن عایق‌بندی نشده باشد.

ه- قطعه مکعب مستطیل شکل که دو انتهای آنها عایق‌بندی شده (شکل در زیر آمده است).

و- قطعه مکعب مستطیل شکل که هیچیک از ابعاد آن عایق‌بندی نشده است.

حل: فرض می‌شود که آب رفتگی خاک در اثر کاهش رطوبت کم و لذا حجم جامد تغییر نکند.

$$\frac{\bar{C}_A - C_A^f}{C_{A_0} - C_A^f} = \frac{\bar{X}_A - X_A^f}{X_{A_0} - X_A^f}$$

$$X_{A_0} = \frac{0.15}{0.85} = 0.1765$$

$$X_A^f = \frac{0.02}{0.98} = 0.0204$$

$$\bar{X}_A = \frac{0.1}{0.9} = 0.111$$

$$E_f = \frac{0.111 - 0.0204}{0.1765 - 0.0204} = 0.58$$

از شکل ۴-۱:

$$\frac{D\theta}{a^2} = 0.135$$

$$\theta = 375 \text{ min}, \quad 2a = 2''$$

$$D = \frac{0.135 \left(\frac{1}{12}\right)^2}{\frac{375}{60}} = 1.5 \times 10^{-4} \frac{ft^2}{hr} \quad (3.9 \times 10^{-4} \frac{m^2}{s})$$

$$\frac{D\theta}{r_s^2} = \frac{1.5 \times 10^{-4} \times 25}{\left(\frac{3}{12}\right)^2} = 0.06$$

الف- قطعه جامد کروی

$$\frac{\bar{X}_A - X_A^F}{X_{A0} - X_A^F} = 0.345$$

$$\bar{X}_A = 0.0742$$

$$\bar{X}_A = \frac{\bar{X}_A}{1 + \bar{X}_A} = 0.069$$

ب- شبیه روش حل مسئله در قسمت الف،

$$\frac{D\theta}{r_s^2} = \frac{1.5 \times 10^{-4} \times 25}{\left(\frac{4}{12}\right)^2} = 0.0388$$

$$E_{\text{cyl}} = 0.615$$

استفاده از شکل ۴-۱

$$\bar{X}_A = (0.615)(0.1764 - 0.0204) + 0.0204 = 0.1164$$

$$\bar{x}_A = 0.1043 \quad \text{یا} \quad \%10.43$$

$$E = f_1 \left(\frac{D\theta}{r_s^2} \right) f_2 \cdot \left(\frac{D\theta}{4a^2} \right) = E_{\text{cyl}} \cdot E_{\text{slab}} \quad 2a = 10'' \quad \text{ج-}$$

$$\frac{D\theta}{(2a)^2} = \frac{1.5 \times 10^{-4} \times 25}{\left(\frac{10}{12}\right)^2} = 5.4 \times 10 \xrightarrow{\text{شکل ۱۴}} E_{\text{slab}} = 0.92$$

$$E = 0.615 \times 0.92 = 0.566$$

$$\bar{X}_A = 0.566(0.1764 - 0.0204) + 0.0204 = 0.1089$$

$$\bar{x}_A = 0.0981 \quad \text{یا} \quad \%9.81$$

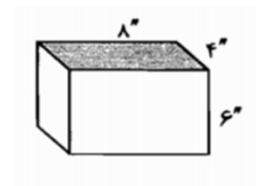
$$E = f_1 \left(\frac{D\theta}{r_s^2} \right) \cdot f_2 \left(\frac{D\theta}{(a)^2} \right) = E_{\text{cyl}} \cdot E_{\text{slab}} \quad \text{د-}$$

$$\frac{D\theta}{(a^2)} = \frac{1.5 \times 10^{-4} \times 25}{\left(\frac{5}{12}\right)^2} = 0.0216 \rightarrow E_{\text{slab}} = 0.83$$

$$E = 0.615 \times 0.83 = 0.51$$

$$\bar{X}_A = (0.5104)(0.1764 - 0.0204) + 0.0204 = 0.1$$

$$\bar{x}_A = 0.0909 \quad \text{یا} \quad \%9.09$$



۵-

$$E = E_{\text{slab1}} \cdot E_{\text{slab2}}$$

$$2a = 4''$$

$$2b = 8''$$

$$\frac{D\theta}{(a^2)} = \frac{1.5 \times 10^{-4} \times 25}{\left(\frac{2}{12}\right)^2} = 0.135 \rightarrow E_{\text{slab1}} = 0.58$$

$$\frac{D\theta}{(b^2)} = \frac{1.5 \times 10^{-4} \times 25}{\left(\frac{4}{12}\right)^2} = 0.0337 \rightarrow E_{\text{slab2}} = 0.79$$

$$E = 0.458, \quad \bar{X}_A = 0.0917 \quad \bar{x}_A = 0.084 \quad \text{یا}$$

$$\bar{x}_A = \%8.4$$

و به روشی مشابه:

$$E = E_{\text{slab1}} \cdot E_{\text{slab2}} \cdot E_{\text{slab3}} = 0.33 \quad \text{یا} \quad \bar{x}_A = 0.067$$

$$\text{یا} \quad \bar{x}_A = \%6.7$$