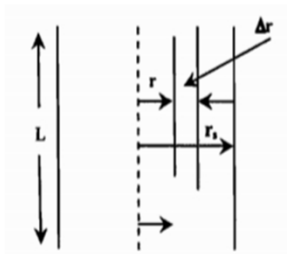


. اعمال شرایط مرزی و اولیه به شرح زیر و حل معادله دیفرانسیل PDE فوق به روش جداسازی متغیرها (ضمیمه ۳-۴) منجر به نتایج زیر می شود.

$$BC_1 \quad C_A(r_s, \theta) = C_A^f \quad \text{غلظت روی سطح} = \text{غلظت در نقطه تعادل} \\ 0 \leq \theta \leq \theta$$

$$BC_2 \quad \lim_{r \rightarrow 0} C_A(r, \theta) = \text{محدود} \quad \text{یا} \quad \left. \frac{\partial C_A(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r \rightarrow 0} = 0$$

$$IC \quad C_A(r, 0) = C_{A_0} \\ 0 \leq r \leq s$$



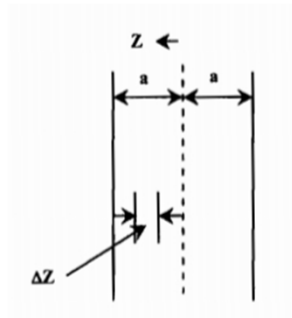
$$\frac{C_{A_0} - \bar{C}_A}{C_{A_0} - C_A^f} = 1 - \frac{4}{r_s^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \exp(-D\lambda_n^2 \theta)$$

λ_n ، ریشه های $J_0(\lambda_n r_s) = 0$ (که: $J_0(\lambda r)$ تابع بسل نوع اول درجه صفر است).

انتقال جرم از قطعه استوانه به فاز اطراف

بنابراین مطابق آنچه در بررسی کره داشتیم، می توان نسبت $E = \frac{C_{A0} - \bar{C}_A}{C_{A0} - C_A^0}$ را راندمان انتقال جرم نیز تلقی نمود. امکان دستیابی به راندمان موضعی در موضعی خاص و یا غلظت در نقطه‌ای به فاصله r از مرکز استوانه و در هر لحظه $\theta = \theta$ میسر است (ضمیمه ۳-۴).

$$\frac{C_{A0} - C_A}{C_{A0} - C_A^f} = 1 - \frac{2}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n r)} e^{-D_{AB} \lambda_n^2 \theta}, \quad J_0(\lambda_n r) = 0$$



انتقال جرم درون تیغه جامد در حالت غیریکنواخت:

تیغه سطحی به ضخامت $2a$ در نظر بگیرید، انتقال جرم از بیرون به داخل تیغه و یا از داخل تیغه به بیرون صورت می گیرد. نمونه واقعی اینگونه نفوذ را می توان در خشک کردن تیغه های مسطح در نظر گرفت. با بیلان در لایه انتقال جرم در شکل زیر (انتقال جرم از قطعه به بیرون صورت می گیرد) به معادله PDE می رسیم.

انتقال جرم از یک قطعه مسطح به بیرون

$$M_A S N_{AZ}|_Z - M_A S N_{AZ}|_{Z+\Delta Z} = S M_A \Delta Z \frac{\partial C_A}{\partial \theta}$$

انتقال جرم درون قطعه جامد فقط در اثر نفوذ مولکولی وجود دارد. لذا:

$$N_{AZ} = J_{AZ} = -D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial Z}$$

$$-\frac{\partial N_{AZ}}{\partial Z} = \frac{\partial C_A}{\partial \theta}$$

$$D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial Z^2} = \frac{\partial C_A}{\partial \theta}$$

ادامه رابطه بیلان جرمی درون تیغه،

شرایط مرزی و اولیه:

$$\text{IC} \quad \theta = 0 \quad Z = Z \quad C_A = C_{A0} \quad \text{یا} \quad C_A(Z, 0) = C_{A0}$$

$$\text{BC}_1 \quad \theta = \theta \quad Z = a \quad C_A = C_A^f \quad \text{یا} \quad C_A(a, \theta) = C_A^f$$

$$\text{BC}_2 \quad \lim_{Z \rightarrow 0} C_A(Z, \theta) = \text{محدود}$$

به روش جداسازی متغیرها، PDE فوق را حل میکنیم. (جزئیات حل در ضمیمه ۴-۴)

$$y = C_A - C_A^f$$

$$y_\theta = \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial C_A}{\partial \theta} \quad , \quad y_z = \frac{\partial y}{\partial Z} = \frac{\partial C_A}{\partial Z} \quad , \quad y_{zz} = \frac{\partial^2 y}{\partial Z^2} = \frac{\partial^2 C_A}{\partial Z^2}$$

از بیان جرم درون تیغه، $D_{AB} y_{zz} = y_\theta$ ، $y = y(Z, \theta)$

IC $y(Z, 0) = C_{A0} - C_A^f$

BC₁ $y(a, \theta) = 0$

BC₂ $\lim_{Z \rightarrow 0} y(Z, \theta) = \text{محدود}$

$$y = Z(Z)T(\theta)$$

جداسازی متغیرها،

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dZ^2} = \frac{1}{D_{AB} T} \frac{dT}{d\theta} = \text{ثابت} = C_1 = -\lambda^2$$

پس از دستیابی به مقدار T و Z و استفاده از سری فوریه، می توان نشان داد که (ضمیمه ۴-۴):

$$C_A - C_A^f + \frac{4}{\pi} (C_{A_0} - C_A^0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos \frac{2n+1}{2a} \pi Z e$$

رابطه فوق، غلظت جزء A را درون تیغه در نقطه‌ای به فاصله Z از مرکز تیغه و در لحظه θ نشان می‌دهد.

$$N_{AZ} \Big|_{\substack{Z=a \\ \theta=\theta}} = D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial Z} \Big|_{\substack{Z=a \\ \theta=\theta}} \quad \text{انتقال جرم در هر لحظه از سطح تیغه}$$

$$N' = \int_0^{\theta} N_{AZ} S M_A d\theta = \text{کل انتقال جرم در طول زمان } \theta$$

و اگر فرض کنیم پس از مدت زمان θ ، غلظت درون تیغه به $\bar{C}_A$ رسیده باشد در این حالت،

$$N' = S M_A a (\bar{C}_A - C_{A_0})$$

و تساوی روابط فوق (برای N')

$$\frac{C_{A0} - \bar{C}_A}{C_{A0} - C_A^f} = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 D \theta}{4a^2}}$$

$$1 - E = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 D \theta}{4a^2}}$$

رسم تغییرات $1 - E = E_\alpha$ به روش لاپلاس معکوس نیز ممکن بوده و جواب نهایی به صورت زیر قابل دستیابی است (جزئیات حل در ضمیمه ۴-۵).

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{erfc} \frac{(2n+1)a-Z}{2\sqrt{D\theta}} + \frac{C_{A0} - C_A}{C_{A0} - C_A^f} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{erfc} \frac{(2n+1)a+Z}{2\sqrt{D\theta}}$$

با دستیابی به مقدار انتقال جرم صورت گرفته در صول زمان θ می توان غلظت متوسط را در نقطه ای به فاصله Z از مرکز تیغه و در هر لحظه θ بدست آورد.

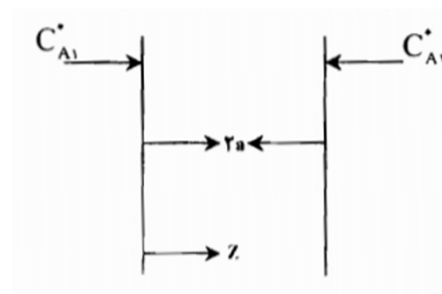
$$\frac{C_{A0} - \bar{C}_A}{C_{A0} - C_A^f} = 2 \sqrt{\frac{D\theta}{a^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{ierfc} \frac{na}{\sqrt{D\theta}} \right]$$

نکته ۱: در صورت تغییر شرایط دو طرف تیغه (که در انتقال جرم در صورت استفاده از غشاء صورت می‌گیرد) شرایط مرزی تغییر خواهد نمود.

$$\text{IC} \quad C_A(Z, 0) = C_{A0}$$

$$\text{BC}_1 \quad C_A(0, \theta) = C_{A1}^0$$

$$\text{BC}_2 \quad C_A(2a, \theta) = C_{A2}^0$$



انتقال جرم از درون تیغه با شرایط مرزی متفاوت در دو طرف تیغه

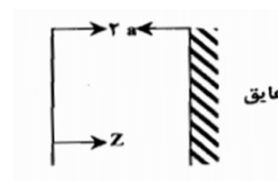
$$\frac{C_{A0} - \bar{C}_A}{C_{A0} - 0.5(C_{A1}^f + C_{A2}^f)} = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \exp\left[-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 \theta}{4a^2}\right]$$

نکته ۲: در صورتیکه انتقال جرم فقط از یک طرف دیواره صورت گیرد طرف دیگر به گونه‌ای غیرقابل نفوذ باشد، شرایط مرزی به صورت زیر تغییر می‌کند.

$$\text{IC} \quad C_A(Z, 0) = C_{A0}$$

$$\text{BC}_1 \quad C_A(0, \theta) = C_{A1}^f$$

$$\text{BC}_2 \quad \left. \frac{\partial C_A}{\partial Z} \right|_{\substack{Z=2a \\ \theta=0}} = 0$$



انتقال جرم درون تیغه و از یک طرف تیغه

بررسی انتقال جرم در تیغه جامد با فرض صادق بودن تئوری نفوذ عمقی (تئوری هگبی)

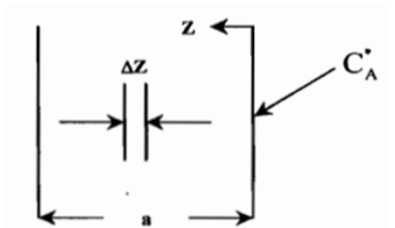
تیغه جامد به ضخامت a در معرض فاز سیال دیگری قرار دارد و انتقال جرم به درون قطعه صورت می‌گیرد. غلظت اولیه جزء خاص انتقالی درون قطعه، یکنواخت و برابر C_{A0} است. نفوذ به کندی صورت می‌گیرد یا زمان تماس دو فاز فوق‌العاده کم است. در چنین حالتی، شرایط مرزی تئوری نفوذ عمقی (یا تئوری هگبی - اطلاعات بیشتر در این زمینه در فصل ۶ آمده است) می‌تواند صادق باشد. هیچگونه واکنش شیمیایی درون تیغه صورت نمی‌گیرد. با بیان جرم برای جزء انتقالی (A) درون لایه نازک مطابق شکل زیر داریم:

$$SM_A N_{AZ}|_Z - SM_A N_{AZ}|_{Z+\Delta Z} = SM_A \Delta Z \frac{\partial C_A}{\partial \theta} - \frac{\partial N_{AZ}}{\partial Z} = \frac{\partial C_A}{\partial \theta}$$

با توجه به عدم وجود حرکت بالک درون تیغه،

$$N_{AZ} = J_{AZ} = -D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial Z}$$

$$D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial Z^2} = \frac{\partial C_A}{\partial \theta}$$



شرایط مرزی و اولیه:

$$\text{IC} \quad \theta = 0 \quad Z = Z \quad C_A = C_{A0} \quad \text{یا} \quad C_A(Z, 0) = C_{A0}$$

$$\text{BC}_1 \quad \theta = \theta \quad Z = 0 \quad C_A = C_A^f \quad \text{یا} \quad C_A(0, \theta) = C_A^f$$

$$\text{BC}_2 \quad \theta = \theta \quad Z = \infty \quad C_A = C_{A0} \quad \text{یا} \quad C_A(\infty, \theta) = C_{A0}$$

حل معادله PDE فوق با شرایط مرزی و اولیه به روش combination یا substitution به صورت زیر خلاصه می شود:

$$C_A = C_A(Z, \theta) = C_A(\phi)$$

$$\phi = \frac{Z}{\theta^n} \quad \text{و آنگاه:}$$

با دستیابی به مقادیر $\frac{\partial C_A}{\partial \theta}$ و $\frac{\partial^2 C_A}{\partial Z^2}$ و جایگذاری در PDE و دستیابی به مقدار n ، $\left(n = \frac{1}{2}\right)$ نهایتاً معادله PDE به صورت یک معادله ODE

$$\frac{C_A^f - C_A}{C_A^f - C_{A0}} = 1 - E = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\phi^2} d\phi = \text{erf}\phi$$

درآمده و جواب نهایی به صورت زیر ارائه می شود.

$$\phi = \frac{Z}{\sqrt{4D_{AB}\theta}} \quad \text{که راندمان انتقال جرم را نشان می دهد. E است و}$$

دستیابی به مقدار انتقال جرم صورت گرفته در هر لحظه و ضریب انتقال جرم
انتقال جرم متوسط صورت گرفته در طول زمان θ ،

$$N_{AZ} = -D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial z} \bigg|_{z=0}^{\theta=\theta} = \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi\theta}} (C_A^f - C_A)$$

$$\bar{N}_{AZ} = \left(\int_0^\theta N_{AZ} d\theta \right) / \int_0^\theta d\theta = 2 \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi\theta}} (C_A^f - C_{A0})$$

این مقدار انتقال جرم متوسط صورت گرفته را می توان با استفاده از ضریب انتقال جرم متوسط و نیروی محرکه بیان نمود،

$$\bar{N}_{AZ} = \bar{k}_{av} (C_A^f - C_{A0})$$

از مقایسه دو مقدار فوق،

$$\bar{k}_{av} = 2 \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi\theta}}$$

حل معادله PDE فوق به روش لاپلاس معکوس نیز ممکن است (جزئیات حل در ضمیمه ۴-۷) و نتایج نهایی به صورت زیر ارائه شده است.

$$\frac{C_A - C_{A_0}}{C_A^* - C_{A_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{erfc} \frac{(2n+1)a - Z}{2\sqrt{D\theta}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{erfc} \frac{(2n+1)a + Z}{2\sqrt{D\theta}}$$

$$\frac{\bar{C}_A - C_{A_0}}{C_A^* - C_{A_0}} = E = 2 \sqrt{\frac{D\theta}{a^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{ierfc} \frac{na}{\sqrt{D\theta}} \right]$$

نفوذ و انتقال جرم در قطعه جامد، در چند بعد و در حالت غیریکنواخت:

قطعه جامد مکعب مستطیل شکلی را در نظر بگیرید که ضخامت آن در جهت X و Y نسبتاً زیاد است، لیکن می‌توان ضخامت جهت Z را نادیده گرفت. حال به بررسی انتقال جرم در چنین سیستمی در دو جهت X و Y می‌پردازیم. می‌توان فرض کرد که انتقال جرم به درون قطعه یا از قطعه به بیرون صورت می‌گیرد. بنابراین تغییرات غلظت در دو جهت X و Y با زمان وجود دارد پس می‌توان نوشت:

$$C_A = C_A(x, y, \theta)$$

غلظت جزء A انتقالی، تابعی از X و Y و θ است.

$$C_A = C_{A1}(x, \theta) C_{A2}(y, \theta)$$

فرض می‌شود: