

انتقال جرم در فیلم مایع در حال ریزش

انتقال جرم از فاز گاز به فیلم مایع در حال ریزش روی دیواره عمودی - شرایط یکنواخت

فیلم نازک مایع روی دیواره عمودی به سمت پایین در حال حرکت است. جریان کاملاً آرام است و انتقال جرم از فاز گاز به مایع صورت می‌گیرد. با بیان در لایه نازک (عمود بر جهت انتقال جرم) سعی می‌کنیم به رابطه کلی انتقال جرم در این حالت برسیم. فرض می‌شود انتقال جرم فقط در جهت X و Z صورت می‌گیرد و از انتقال جرم در جهت Y که بسیار کم است، صرف نظر می‌شود. بنابراین با توجه به المان در شکل ۶-۲:

تجمع = جرم تولیدی یا مصرفی $\pm$ جرم خروجی - جرم ورودی

$$X \text{ جهت} = M_A \left(\Delta Z w N_{AX} \Big|_x \right)$$

$$X \text{ جهت} = M_A \left(\Delta Z w N_{AX} \Big|_{x+\Delta x} \right)$$

به ترتیب فوق جرم ورودی و خروجی در جهت Z را می‌توان نوشت (توجه: شرایط یکنواخت بوده، جرم تولیدی یا مصرفی در اثر واکنش شیمیایی نداریم)

$$M_A (\Delta x w N_{AZ} \Big|_z - \Delta x w N_{AZ} \Big|_{z+\Delta z} + \Delta Z w N_{AX} \Big|_x - \Delta Z w N_{AX} \Big|_{x+\Delta x}) = 0$$

$$-\left(\frac{\partial N_{AX}}{\partial x} + \frac{\partial N_{AZ}}{\partial Z} \right) = 0$$

جریان کاملاً آرام، در آن موضع خاص:

$$N_{Ax} = \underbrace{J_{Ax}}_{\text{نفوذ مولکولی}} + \underbrace{x_A \sum N_{ix}}_{\text{حرکت توده ای}}$$

از حرکت توده‌ای (Bulk) در جهت x صرف‌نظر می‌شود (نوع Bulk در جهت x کنوکسیون طبیعی است که در مقایسه با نفوذ مولکولی قابل صرف‌نظر کردن می‌باشد). حلالیت A در مایع بسیار کم و به لحاظ حلالیت کم، فرض می‌شود که دانسیته و ویسکوزیته سیال مایع تغییری نکرده است.

$$J_{Ax} = -D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial x}$$

در جهت Z از نفوذ مولکولی در مقایسه با حرکت توده‌ای سیال صرف‌نظر می‌شود (نوع Bulk در جهت Z از نوع کنوکسیون اجباری است که در مقایسه با نفوذ مولکولی، زیاد و لذا از نفوذ مولکولی در این جهت صرف‌نظر می‌شود).

$$N_{AZ} = J_{AZ} + x_A \sum N_{iz} = C_A V_Z \quad , \quad V_Z = f(x)$$

D_{AB} ثابت، غلظت کل ثابت است.

$$\frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} = D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial N_{Ax}}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial Z} (C_A V_z) = V_z \frac{\partial C_A}{\partial Z}$$

بنابراین:

$$(*) V_z \frac{\partial C_A}{\partial Z} = D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2}$$

رابطه فوق (رابطه *) را می‌توان با استفاده از رابطه کلی پیوستگی در مختصات کارتزین و با توجه به فرضیات فوق‌الذکر نیز بدست آورد.

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \left(V_x \frac{\partial C_A}{\partial x} + V_y \frac{\partial C_A}{\partial y} + V_z \frac{\partial C_A}{\partial z} \right) = D_{AB} \left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right) + R_A$$

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = 0 \text{ شرایط یکنواخت}$$

$$V_x \frac{\partial C_A}{\partial x} = 0$$

حرکت توده‌ای در مقایسه با نفوذ (در جهت x) صرف نظر می‌شود.

$$V_y \frac{\partial C_A}{\partial y} = 0 \quad \text{و} \quad D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} = 0$$

در جهت y انتقال جرم نداریم.

نفوذ مولکولی در مقایسه با حرکت توده‌ای (در جهت Z) صرف نظر می‌شود، $D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} = 0$

$$V_Z \frac{\partial C_A}{\partial Z} = D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} \quad \text{و} \quad C_A = C_A(x, Z)$$

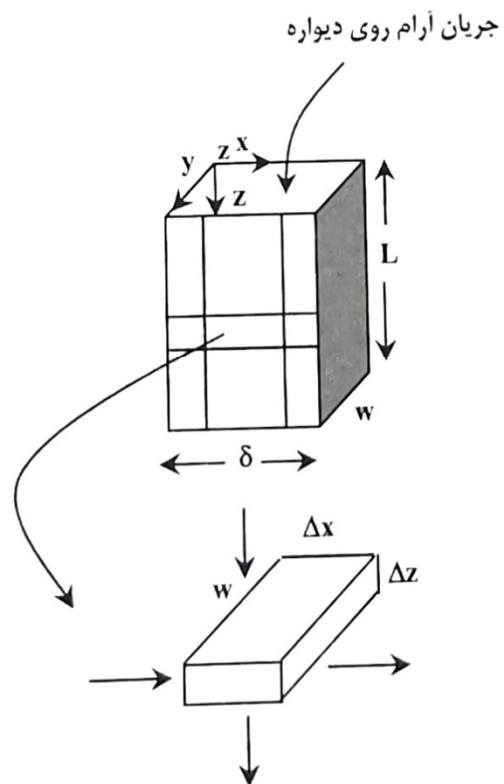
بیلان ممنتوم (از مکانیک سیالات) نتیجه می‌دهد پروفایل سرعت در جریان آرام:

$$V_Z = \frac{\rho g \delta^2}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right]$$

$$\bar{V}_Z = \frac{\int_0^\delta V_Z dx}{\int_0^\delta dx} = \frac{\rho g \delta^2}{3\mu}$$

$$\delta = \left(\frac{3\bar{V}_Z \mu}{\rho g} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3\mu \Gamma}{\rho^2 g} \right)^{\frac{1}{3}}$$

دبی جرمی مایع به ازاء عرض واحد ($w = 1$):



$$V_z = \frac{3}{2} \bar{V}_z \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right]$$

$$V_{z_{max}} = \frac{3}{2} \bar{V}_z$$

$$V_z = V_{z_{max}} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right]$$

بنابراین:

$$\frac{3}{2} \bar{V}_z \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right] \frac{\partial C_A}{\partial z} = D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2}$$

با اعمال شرایط مرزی:

$$BC_1 \quad Z = 0 \quad x = x \quad C_A = C_{A_0} = \text{غلظت اولیه}$$

$$BC_2 \quad Z = Z \quad x = 0 \quad C_A = C_{Ai} = \text{غلظت در فصل مشترک}$$

$$BC_3 \quad Z = Z \quad x = \delta \quad \left. \frac{\partial C_A}{\partial x} \right|_{x=\delta} = \text{عدم نفوذ از دیواره}$$

حل معادله دیفرانسیل جزئی فوق با شرایط مرزی و به روش جداسازی متغیرها منجر به رابطه زیر می شود.

$$\frac{C_{Ai} - \bar{C}_{AL}}{C_{Ai} - C_{A_0}} = 0.7857e^{-5.1213\eta} + 0.1001e^{-39.18\eta} + 0.03599e^{-105.96\eta} + 0.01811e^{-204.75\eta} + \dots$$

(**)

و یا:

$$\frac{C_{Ai} - \bar{C}_{AL}}{C_{Ai} - C_{A_0}} = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e^{-\beta_j \eta}$$

مقادیری از α_z و β_z در رابطه فوق ارائه شده و نیز،

$$\eta = \frac{2D_{AB}L}{3\delta^2\bar{V}_Z} = \frac{2D_{AB}L\mu}{\delta^4\rho g}$$

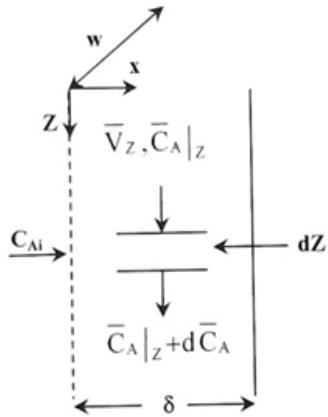
$$\bar{C}_{AL} = \frac{\int_0^\delta C_A|_{z=L} dx}{\int_0^\delta dx}$$

چگونگی تغییرات $\frac{C_{Ai}-\bar{C}_{AL}}{C_{Ai}-C_{A0}}$ بر حسب η توسط Nusselt ارائه شده است.

اگر غلظت در فصل مشترک C_{Ai} ، غلظت در حد اشباع تلقی شود، آنگاه نسبت $\frac{\bar{C}_{AL}-C_{A0}}{C_{Ai}-C_{A0}}$ را می توان $\frac{\text{انتقال جرم صورت گرفته}}{\text{حداکثر انتقال جرم ممکن}}$ یا راندمان نیز تعریف نمود.

دستیابی به ضریب انتقال جرم متوسط

با توجه به شکل مقابل:



جرم انتقالی به المان در اثر نفوذ = جرم خروجی از المان توسط حرکت مایع

$$\bar{V}_Z \delta w (\bar{C}_A|_z + d\bar{C}_A) - \bar{V}_Z \delta w \bar{C}_A|_z = w dZ N_{Ax}|_{x=0}$$

$$w dZ k (C_{Ai} - \bar{C}_A)$$

K ضریب انتقال جرم در موضع خاص و w عرض مایع روی دیواره می باشد.

$$\bar{V}_Z \delta d\bar{C}_A = k(C_{Ai} - \bar{C}_A) dZ$$

$$\bar{V}_Z \delta \int_{C_{A0}}^{\bar{C}_{A,L}} \frac{d\bar{C}_A}{C_{Ai} - \bar{C}_A} = \int_0^L k dZ$$

$$k_{av} = \frac{\bar{V}_Z \delta}{L} \ln \frac{C_{Ai} - C_{A0}}{C_{Ai} - \bar{C}_{AL}} \quad (3^*)$$

ضریب انتقال جرم k_{av} مقدار ضریب انتقال جرم متوسط در طول دیواره می‌باشد $(0 - L)$ ، که ثابت فرض شده است. بنابراین مقدار k_{av} برای هر موضع بین صفر تا L نیز در صورت نیاز استفاده خواهد شد. حال دو حالت خاص زمان تماس زیاد بین دو فاز و زمان تماس کم بین دو فاز را بررسی می‌کنیم.

زمان تماس طولانی بین دو فاز

زمان تماس زیاد بین دو فاز و یا سرعت سیال بسیار کم، در این حالت فقط اولین ترم از رابطه $(**)$ استفاده شده، از بقیه ترم‌ها می‌توان صرف نظر نمود (در این حالت مقدار η بسیار زیاد خواهد بود).

$$\ln \frac{C_{Ai} - C_{A0}}{C_{Ai} - \bar{C}_{AL}} = \ln \frac{1}{0.7857 e^{-5.1213\eta}} = 0.241 + 5.1213\eta$$

جایگذاری از رابطه (3*):

$$\frac{k_{av}L}{\bar{V}_Z\delta} = 0.241 + 5.1213\eta$$

$$k_{av} = 0.2412 \frac{\bar{V}_Z\delta}{L} + 5.1213 \frac{2D_{AB}}{3\delta}$$

با توجه به مقدار کوچک $\bar{V}_Z$ و اینکه δ در مقایسه با L بسیار کوچک خواهد بود، از ترم اول رابطه فوق در مقایسه با ترم دوم صرف نظر می شود. بنابراین:

$$k_{av} = 3.414 \frac{D_{AB}}{\delta}$$

$$\frac{k_{av}\delta}{D_{AB}} = Sh_{av} = 3.414$$

کل جرم منتقل شده

کل جرم انتقالی به فیلم مایع برابر است با:

$$W_A = M_A \bar{V}_Z \delta w (\bar{C}_{AL} - C_{A_0})$$

از طرفی می‌توان با استفاده از معادلات سرعت مقدار کل انتقال جرم را نیز بدست آورد.

$$W_A = M_A L w k_{av} (C_{Ai} - \bar{C}_{Am})$$

که C_{Ai} غلظت در فصل مشترک و $\bar{C}_{Am}$ غلظت متوسط در توده سیال و در سرتاسر دیواره است که به صورت زیر قابل دستیابی است. از تساوی دو رابطه فوق برای W_A ، و جایگذاری مقدار k_{av} از رابطه (3*):

$$M_A \bar{V}_Z \delta w (\bar{C}_{AL} - C_{A0}) = M_A L w k_{av} (C_{Ai} - \bar{C}_{Am})$$

$$k_{av} = \frac{\bar{V}_Z \delta}{L} \ln \frac{C_{Ai} - C_{A0}}{C_{Ai} - \bar{C}_{AL}}$$

بنابراین:

$$M_A \bar{V}_Z \delta w (\bar{C}_{AL} - C_{A0}) = M_A L w \frac{\bar{V}_Z \delta}{L} \ln \frac{C_{Ai} - C_{A0}}{C_{Ai} - \bar{C}_{AL}} (C_{Ai} - \bar{C}_{Am})$$

$$(C_{Ai} - \bar{C}_{Am}) = \frac{\bar{C}_{AL} - C_{A0}}{\ln \frac{C_{Ai} - C_{A0}}{C_{Ai} - \bar{C}_{AL}}} = \frac{(C_{Ai} - C_{A0})(C_{Ai} - \bar{C}_{AL})}{\ln \frac{C_{Ai} - C_{A0}}{C_{Ai} - \bar{C}_{AL}}}$$

$$= (C_{Ai} - \bar{C}_A)_{L,M} = \text{(طبق تعریف فوق) متوسط لگاریتمی}$$

بنابراین مقدار انتقال جرم کلی صورت گرفته با استفاده از معادله سرعت به صورت زیر خواهد بود:

$$W_A = M_A L w k_{av} (C_{Ai} - \bar{C}_A)_{L,M}$$

زمان تماس کم بین دو فاز

بازگشت به رابطه (۶-۳۷) و بررسی زمان تماس کم بین دوفاز (Sherwood-Pigford) حاکی از آن است که در این حالت، $\frac{L}{V_{\max}}$ بسیار کم،

$\delta \ll x$ و $1 \ll \left(\frac{x}{\delta}\right)^2$ بوده و با توجه به رابطه بدست آمده از مکانیک سیالات داریم:

$$V_Z = V_{Z\max}$$

بنابراین فرمول در حالت زمان تماس کم به صورت زیر در می آید:

$$V_{\max} \frac{\partial C_A}{\partial Z} = D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2}$$

با استفاده از روش Combination method یا Substitution (ضمیمه ۶-۳)، معادله دیفرانسیل جزئی فوق حل می‌شود. بنابراین:

$$\frac{C_A - C_{A_0}}{C_{Ai} - C_{A_0}} = 1 - \operatorname{erf} \frac{x}{\sqrt{4DZ/V_{\max}}} = \operatorname{erfc} \frac{x}{\sqrt{4DZ/V_{\max}}}$$

اگر غلظت اولیه در فیلم $C_{A_0} = 0$ باشد، آنگاه:

$$\frac{C_A}{C_{Ai}} = \operatorname{erfc} \frac{x}{\sqrt{4DZ/V_{\max}}}$$

کل جرم منتقل شده

کل جرم انتقالی در این حالت:

$$W_A = M_A \int_0^w \int_0^L N_{Ax}|_{x=0} dy dZ$$

$$N_{Ax}|_{x=0} = -D \left. \frac{\partial C_A}{\partial x} \right|_{x=0}$$

با استفاده از رابطه فوق (پروفایل غلظت)، اگر $C_{A_0} = 0$ باشد (جزئیات حل در ضمیمه)،

$$\left. \frac{\partial C_A}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{C_{Ai} \sqrt{4V_{\max}}}{\sqrt{\pi DZ}}$$

$$W_A = wLM_A \sqrt{\frac{4D_{AB}V_{\max}}{\pi L}} C_{Ai}$$

بنابراین:

ضریب انتقال جرم متوسط

با توجه به زمان تماس کم، نیروی محرکه در این حالت در سرتاسر مسیر انتقال جرم به صورت $C_{Ai} - C_{A_0}$ باقی می ماند، لذا می توان کل انتقال جرم صورت گرفته را با استفاده از معادله سرعت زیر بدست آورد.

$$W_A = wLM_A k_{av} (C_{Ai} - C_{A_0})$$

از طرفی:

$$W_A = wLM_A \sqrt{\frac{4D_{AB}V_{\max}}{\pi L}} (C_{Ai} - C_{A_0})$$

بنابراین:

$$k_{av} = \sqrt{\frac{4D_{AB}V_{\max}}{\pi L}}$$

از طرفی:

$$V_{\max} = \frac{3}{2} \bar{V} = \frac{3}{2} \frac{\Gamma}{\rho \delta}$$

بنابراین:

$$k_{av} = \sqrt{\frac{6D_{AB}\Gamma}{\pi\rho\delta L}}$$

با توجه به تعریف اعداد بدون بعد $Sh = \frac{k_{av}\delta}{D_{AB}}$ و $Sc = \frac{\mu}{\rho D_{AB}}$ و $Re = \frac{4\Gamma}{\mu}$ ، آنگاه:

$$Sh_{av} = \left(\frac{3}{2\pi} \frac{\delta}{L} Re Sc\right)^{\frac{1}{2}}$$

زمان تماس کوتاه و رابطه Kramers and kreyger

Kramers and kreyger از رابطه زیر که در زمان تماس کوتاه اتفاق خواهد افتاد استفاده کرده‌اند.

$$V_Z \frac{\partial C_A}{\partial Z} = D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2}$$

$$V_Z = ax$$

که:

مقدار a با توجه به اطلاعات موجود در مکانیک سیالات قابل دستیابی بوده و اعمال شرایط مرزی به صورت زیر و حل معادله دیفرانسیل جزئی فوق (جزئیات در ضمیمه ۴-۶) منجر به رابطه زیر خواهد شد:

شرایط مرزی:

$Z = 0$	$x \geq 0$	$C_A = 0$	غلظت اولیه
$Z > 0$	$x = 0$	$C_A = C_{Ai}$	غلظت در فصل مشترک

بنابراین:

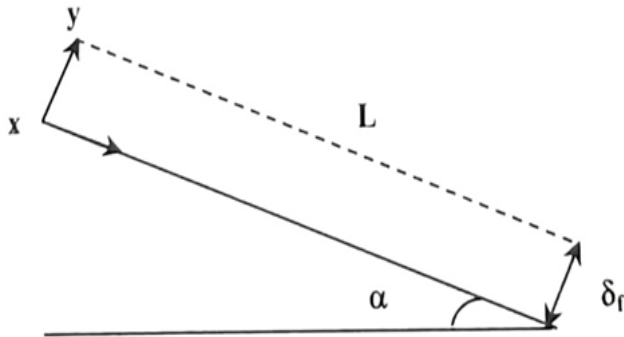
$$Sh = \frac{k_{av}L}{D_{AB}} = 0.783Re^{\frac{1}{9}}Sc^{\frac{1}{3}}\left(\frac{L^3\rho^2g}{\mu^2}\right)^{\frac{2}{9}}$$

که مقادیر Re و Sc قبلاً تعریف شده‌اند.

انتقال جرم از جامد به فیلم مایع در حال ریزش روی دیواره شیب‌دار

انتقال جرم از سطح جامد به سیال مایع در حال حرکت روی دیواره شیب‌دار را بررسی می‌کنیم. حرکت سیال کاملاً آرام است. میزان حلالیت A (از سطح جامد، جزء انتقالی) بسیار کم و لذا می‌توان از حرکت توده‌ای در جهت Y صرف‌نظر نمود. با استفاده از بیلان در لایه نازک عمود بر جهت انتقال جرم یا استفاده از معادله پیوستگی:

$$\underbrace{\frac{\partial C_A}{\partial t}}_{\text{شرایط یکنواخت}=0} + \left(\underbrace{u_x \frac{\partial C_A}{\partial x}}_{\text{صرف نظر}} + \underbrace{u_y \frac{\partial C_A}{\partial y}}_{\text{صرف نظر}} + \underbrace{u_z \frac{\partial C_A}{\partial z}}_{u_z=0} \right) = D_{AB} \left(\underbrace{\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2}}_{\text{صرف نظر}} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2}}_{=0} \right) + \underbrace{R_A}_{=0}$$



شکل: فیلم مایع در حال ریزش روی دیواره شیب‌دار در حال حل در فیلم

$$u_x \frac{\partial C_A}{\partial x} D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2}$$

حالت خاص ۱

گرادیان سرعت در لایه‌های چسبیده به جامد خطی فرض شده و لذا:

$$u_x = \beta y$$

که β مقدار ثابتی است (Kramers & kreyger).

این حالت شبیه انتقال جرم در فیلم نازک در حال ریزش روی دیواره عمودی با فرض خطی بودن سرعت سیال (که قبلاً بررسی شده است) می‌باشد. اعمال شرایط مرزی:

$$x = 0, \quad y \geq 0 \quad C_A = C_{A_0} \quad \text{قبل از تماس - غلظت اولیه}$$

$$x > 0, \quad y = 0 \quad C_A = C_{Ai} \quad \text{غلظت در سطح تماس}$$

$$x > 0, \quad y \approx \delta_f \quad C_A = C_{A_0} \quad \text{حلالیت کم، عدم نفوذ تا بالاترین نقطه}$$

سرعت نفوذ در مقایسه با ضخامت فیلم بسیار بسیار کم است یا زمان تماس فوق‌العاده کوتاه است. لذا شرط مرزی سوم به صورت زیر خواهد شد:

$$x > 0, \quad y \approx \infty \quad C_A = C_{A_0}$$

می‌توان نشان داد (جزئیات حل در ضمیمه ۴-۶):

$$C_A = C_A(x, y) \quad , \quad \frac{C_A - C_{A0}}{C_{Ai} - C_{A0}} = \frac{\int_{\eta}^{\infty} \exp(-\eta^3) d\eta}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}$$

$$\eta = y \left(\frac{\beta}{D_{AB} x} \right)^{\frac{1}{3}}$$

ضریب انتقال جرم موضعی، متوسط و کل انتقال جرم صورت گرفته:

$$N_{Ax} = k_x (C_{Ai} - C_{A0}) = -D_{AB} \left. \frac{\partial C_A}{\partial y} \right|_{y=0, x=x}$$

$$k_x = - \frac{D_{AB}}{C_{Ai} - C_{A0}} \left. \frac{\partial C_A}{\partial y} \right|_{y=0, x=x}$$

$$k_{av} = \frac{\int_0^L k_x dx}{\int_0^L dx} = 0.808 D_{AB} \left(\frac{\beta}{D_{AB} L} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{از طرفی (با فرض } C_{A_0} = 0 \text{):}$$

$$Sh_{av} = \frac{k_{av} L}{D_{AB}} = 0.808 L \left(\frac{\beta}{D_{AB} L} \right)^{\frac{1}{3}}$$

با دستیابی به مقدار β ، می‌توان به Sh_{av} دست یافت:

$$\beta = \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0}, \quad u = \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} \left(\delta_f y - \frac{y^2}{2} \right)$$

$$\beta = \frac{\delta_f \rho g \sin \alpha}{\mu}$$

با جایگذاری مقدار β و تعریف عدد رینولدز و اشمیت داریم:

$$Sh_{av} = 0.783 Re^{\frac{1}{9}} Sc^{\frac{1}{3}} \left(\frac{L^3 \rho^2 g \sin \alpha}{\mu^2} \right)^{\frac{2}{9}}$$

رابطه فوق توسط Kramers and Kreyger از حل شدن اسید بنزوئیک در فیلم مایع آب برای حالتی که $5 \leq L < 80 \text{ mm}$ و $\alpha = 6.45$ و طول ورودی اولیه 330 mm بوده است مورد ارزیابی و تأیید قرار گرفته است. در آزمایشات آنها حرکت مایع با $Re < 2000$ گزارش شده است.

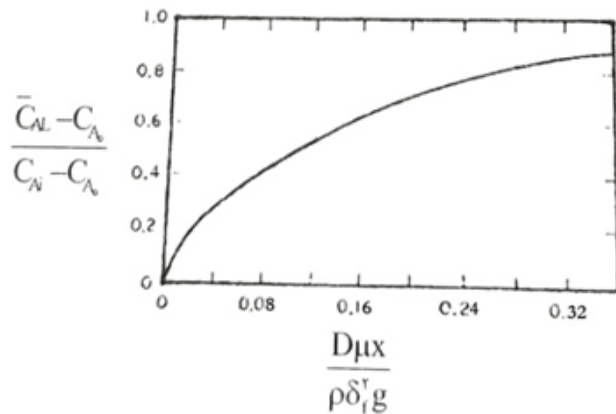
حالت خاص ۲: اگر شرایط به گونه‌ای باشد که انتقال جرم تا آن طرف منطقه خطی بودن گرادیان سرعت، نفوذ نماید یا به عبارتی بهتر رابطه کلی سرعت در این حالت به شرح زیر مورد استفاده قرار گیرد،

$$U = \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} \left(\delta_f y - \frac{y^2}{2} \right)$$

و یا:

$$\frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} \left(\delta_f y - \frac{y^2}{2} \right) \frac{\partial C_A}{\partial x} = + D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2}$$

حل عددی رابطه فوق در شکل زیر آمده است.



شکل انتقال جرم از جامد به فیلم مایع در حال ریزش - جریان آرام