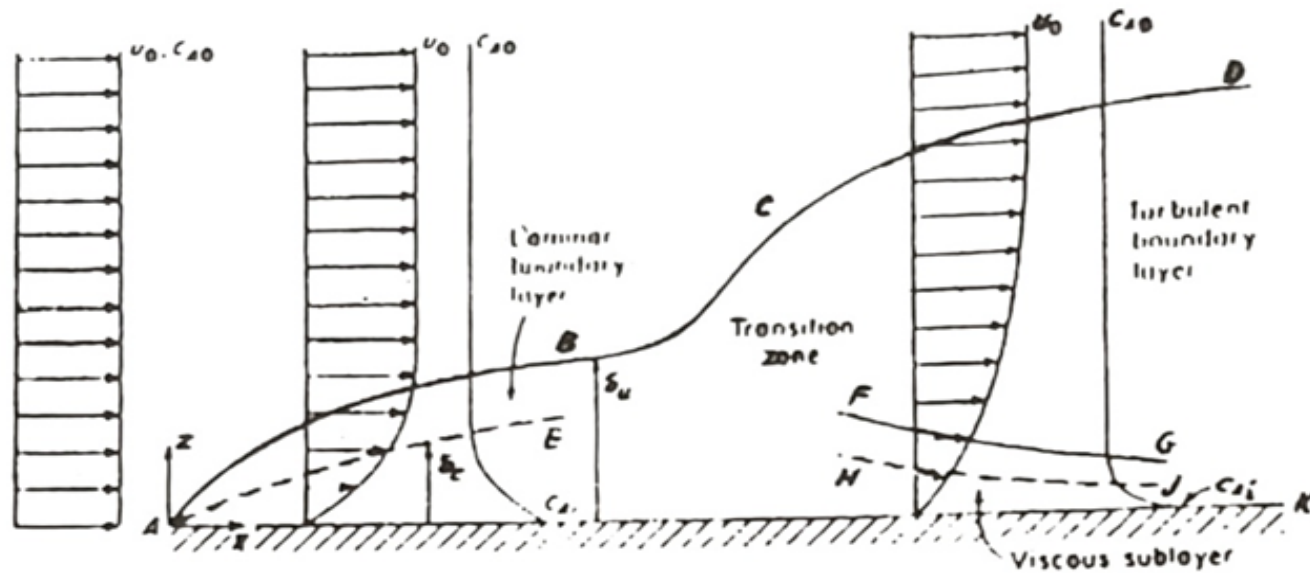


انتقال جرم به سیال در حال حرکت روی سطح افقی در جریان آرام



شکل لایه‌های مرزی روی صفحه افقی جامد

حل دقیق:

با استفاده از معادلات کلی پیوستگی و با توجه به آنکه از هرگونه تغییرات غلظت در جهت  $Y$  صرف نظر شده است، واکنش شیمیایی نداشته و حالت یکنواخت بررسی می شود. لذا:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right)$$

$$u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

$$u_x \frac{\partial C_A}{\partial x} + u_z \frac{\partial C_A}{\partial z} = D_{AB} \left( \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right)$$

با تغییر متغیرهای زیر و اعمال شرایط مرزی در روابط فوق و با صرف نظر از نفوذ در جهت حرکت سیال می توان نوشت:

تغییر متغیرها:

$$u' = \frac{u_x - u_x|_{z=0}}{u_0 - u_x|_{z=0}}, \quad C'_A = \frac{C_A - C_{Ai}}{C_{A0} - C_{Ai}}, \quad T' = \frac{T - T_i}{T_0 - T_i}$$

که  $T_i, C_{Ai}$  غلظت و دما در  $Z = 0$  هستند.

شرایط مرزی:

$$Z = 0 \quad u_x \Big|_{Z=0} = 0 \quad , \quad C_A = C_{Ai} \quad , \quad T = T_i \quad , \quad u' = C'_A = T' = 0$$

$$Z = \infty \quad u_x \Big|_{Z=\infty} = u_0 \quad , \quad C_A = C_{A_0} \quad , \quad T = T_0 \quad , \quad u' = C'_A = T' = 1$$

$$x = 0 \quad u_x \Big|_{Z=Z} = u_0 \quad , \quad C_A = C_{A_0} \quad , \quad T = T_0 \quad , \quad u' = C'_A = T' = 1$$

صرف نظر از نفوذ در جهت حرکت سیال:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}$$

$$u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$u_x \frac{\partial C_A}{\partial x} + u_z \frac{\partial C_A}{\partial z} = D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2}$$

ملاحظه می‌شود حل معادلات لایه مرزی، با شرایط مرزی یکسان و در صورت تساوی  $\nu = \alpha = D_{AB}$  (که در این صورت  $Sc = \frac{\nu}{D}$  و  $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ ) خواهد شد.  $Pr = Sc = 1$  خواهد شد) و استفاده از روابط پیوستگی به روابط نهایی یکسانی ختم خواهد شد.

$$Nu_x = \text{عدد ناسلت موضعی} = \frac{h_x x}{k} = 0.332 Re_x^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}$$

$$\overline{Nu}_{av} = \frac{\bar{h}L}{k} = 0.664 Re_L^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}$$

و نیز در انتقال جرم

$$Sh_x = \frac{f_x x}{CD_{AB}} = 0.332 Re_x^{\frac{1}{2}} Sc^{\frac{1}{3}}$$

$$\overline{Sh}_{av} = \frac{\bar{F}L}{CD_{AB}} = 0.664 Re_L^{\frac{1}{2}} Sc^{\frac{1}{3}}$$

## روش تقریبی (Von Karman)

روش دیگری در این رابطه برای حل مسئله و دستیابی به رابطه‌ای برای انتقال جرم در لایه مرزی آرام ارائه شده است. در این روش با استفاده از بیلان کلی و بیلان جزئی (برای جزء A) و دستیابی به پروفایل سرعت و غلظت در لایه مرزی به رابطه ضریب انتقال جرم موضعی خواهیم رسید و سپس ضریب انتقال جرم متوسط و مقدار انتقال جرم موضعی یا کلی قابل دستیابی است.

### ضریب انتقال جرم موضعی

با استفاده از معادلات سرعت:

$$N_{A0} = k_X (C_{Ai} - C_{A0}) = -D_{AB} \left. \frac{\partial C_A}{\partial Z} \right|_{z=0}$$

اگر پروفایل غلظت در هر نقطه‌ای مانند X در لایه مرزی به صورت زیر فرض شود:

$$C_A - C_{Ai} = a + bz + cz^2 + dz^3$$

و نیز:

$$Z = 0 \quad C_A = C_{Ai} \quad \therefore \quad a = 0$$

$$Z = \delta_c \quad C_A = C_{A_0} \quad \therefore \quad C_{A_0} - C_{Ai} = b\delta_c + c\delta_c^2 + d\delta_c^3$$

$$Z = \delta_c \quad \frac{\partial C_A}{\partial Z} = 0 \quad \therefore \quad b + 2c\delta_c + 3d\delta_c^2 = 0$$

(عدم وجود نیروی محرکه)

$$Z = 0 \quad \frac{\partial^2 C_A}{\partial Z^2} = 0 \quad \therefore \quad c = 0$$

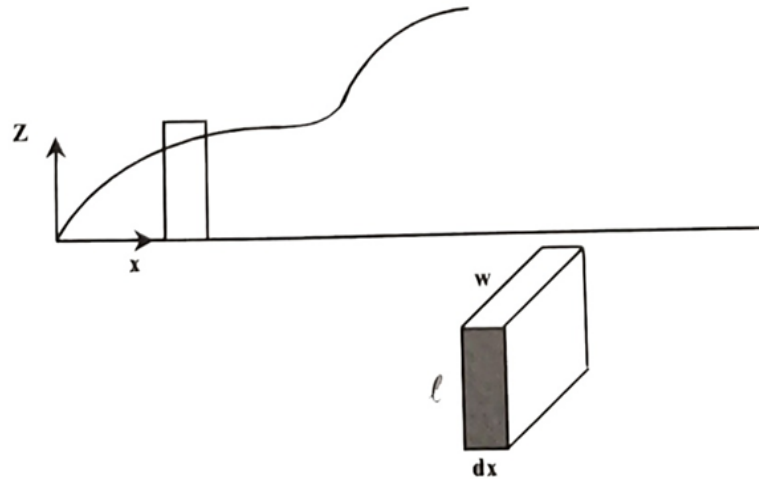
بنابراین:

$$\frac{C_A - C_{Ai}}{C_{A_0} - C_{Ai}} = \frac{3}{2} \left( \frac{Z}{\delta_c} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{Z}{\delta_c} \right)^3$$

$$\left. \frac{\partial C_A}{\partial Z} \right|_{Z=0} = (C_{A_0} - C_{Ai}) \frac{3}{2\delta_c} - \frac{1}{2\delta_c^3} \times 3Z^2 \Big|_{Z=0} = -\frac{k_X}{D_{AB}} (C_{Ai} - C_{A_0})$$

$$k_X = \frac{3D_{AB}}{2\delta_c}$$

بنابراین باید به گونه‌ای ضخامت لایه غلظت،  $\delta_c$  بدست آید. با بیان جرم روی کنترل حجمی مطابق شکل



$$\text{جرم ورودی در جهت } x = \rho w \int_0^l U dz$$

$$\text{جرم خروجی در جهت } x = \rho w \int_0^l u dz + \left[ \frac{d}{dx} \left( \rho w \int_0^l u dz \right) \right] dx$$

$$\text{جرم ورودی از سطح (پائین)} = CMV_0 w dx = \rho w V_0 dx$$

$$\text{جرم ورودی از بالای المان حجمی} = CMV_1 w dx = \rho w V_1 dx$$

شرایط یکنواخت:

جرم خروجی = جرم ورودی

$$\rho w V_0 dx + \rho w V_1 dx + \rho w \int_0^\ell u dZ = \rho w \int_0^\ell u dZ + \frac{d}{dx} \left( \rho w \int_0^\ell u dZ \right) dx$$

$$V_1 = \frac{d}{dx} \left( \int_0^\ell u dZ \right) - V_0$$

با استفاده از معادله پیوستگی نیز می توان به رابطه فوق رسید:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

$$\int_{V_0}^{V_1} du_z = - \int_0^\ell \frac{\partial u_x}{\partial x} dZ$$

$$-V_1 - V_0 = - \int_0^\ell \frac{\partial u_x}{\partial x} dZ \quad \therefore \quad V_1 = \int_0^\ell \frac{\partial u_x}{\partial x} dZ - V_0$$

بیان برای جزء A:

$$\text{جرم ورودی } A \text{ در جهت } x = \rho_A w \int_0^\ell u dZ$$

$$\text{جرم خروجی } A \text{ در جهت } x = \rho_A w \int_0^\ell u dZ + \left[ \frac{d}{dx} \left( \rho_A w \int_0^\ell u dZ \right) \right] dx$$

$$\text{جرم ورودی } A \text{ از پایین} = M_A w dx_A n_{AZ} \Big|_{Z=0} = M_A w dx_A \left( J_{AZ} \Big|_{Z=0} + C_{Ai} V_0 \right)$$

$$= w dx \left( -D_{AB} \frac{\partial \rho_A}{\partial Z} \Big|_{Z=0} + \rho_{Ai} V_0 \right)$$

$$\text{جرم ورودی } A \text{ از بالا} = \rho_{A_0} w dx V_1$$

بنابراین:

$$\frac{d}{dx} \left( \rho_A w \int_0^\ell u dZ \right) dx = w dx \left( -D_{AB} \frac{\partial \rho_A}{\partial Z} \Big|_{Z=0} + \rho_{Ai} V_0 \right) + \rho_{A_0} w V_1 dx$$

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\ell u dZ - V_0$$

جایگزینی مقدار  $V_1$ :

$$D_{AB} \frac{\partial \rho_A}{\partial Z} \Big|_{Z=0} + V_0 (\rho_{A_0} - \rho_{Ai}) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_c} (\rho_{A_0} - \rho_A) U dZ$$

$$\rho_{A_0} - \rho_A = 0 \quad , \quad \delta_c \leq Z \leq \ell \quad \text{توجه:}$$

با توجه به پروفایل سرعت و غلظت

$$u = a + bZ + cZ^2 + dZ^3$$

$$Z = 0 \quad u = 0$$

$$Z = \delta \quad u = u_0$$

$$\frac{\partial u}{\partial Z} \Big|_{Z=\delta} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} \Big|_{Z=0} = 0$$

اعمال شرایط فوق:

$$\frac{u}{u_0} = \frac{3}{2} \left( \frac{Z}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{Z}{\delta} \right)^3$$

با توجه به پروفایل غلظت:

$$\frac{\rho_A - \rho_{Ai}}{\rho_{A0} - \rho_{Ai}} = \frac{3}{2} \left( \frac{Z}{\delta_c} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{Z}{\delta_c} \right)^3$$

جایگذاری در رابطه فوق:

$$\frac{10u}{u_0} = \phi^3 \delta \frac{d\delta}{dx} + 2\delta^2 \phi^2 \frac{d\phi}{dx}, \quad \phi = \frac{\delta_c}{\delta}$$

اعمال شرایط فوق:

$$\frac{u}{u_0} = \frac{3}{2} \left( \frac{Z}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{Z}{\delta} \right)^3$$

با توجه به پروفایل غلظت:

$$\frac{\rho_A - \rho_{Ai}}{\rho_{A0} - \rho_{Ai}} = \frac{3}{2} \left( \frac{Z}{\delta_c} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{Z}{\delta_c} \right)^3$$

جایگذاری در رابطه فوق:

$$\frac{10u}{u_0} = \phi^3 \delta \frac{d\delta}{dx} + 2\delta^2 \phi^2 \frac{d\phi}{dx}, \quad \phi = \frac{\delta_c}{\delta}$$

توجه: از  $V_0$  صرف نظر شده است (صرف نظر از حرکت توده ای (کنوکسیون طبیعی) در مقابل نفوذ ملکولی).

$$\frac{\delta}{x} = 4.64 \text{Re}^{-\frac{1}{2}}$$

از مکانیک سیالات:

$$\frac{d\delta}{dx} = 4.64 \left( \frac{\mu}{\rho u_0} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right) = 2.32 \text{Re}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\delta^2 = 21.53 \left( \frac{\mu}{\rho u_0} \right) x$$

$$\phi^3 + \frac{4}{3} x \frac{d\phi^3}{dx} = \frac{0.929}{Sc}$$

$$\phi^3 = \frac{0.929}{Sc} + Cx^{-\frac{3}{4}}$$

شروع انتقال جرم از  $x = x_0$  ،  $\phi = 0$  ،  $\delta_c = 0$  ،  $x = x_0$  ،  $x = x_0$

$$\phi = \frac{\delta_c}{\delta} = \left\{ \frac{0.929}{Sc} \left[ 1 - \left( \frac{x_0}{x} \right)^{\frac{3}{4}} \right] \right\}^{\frac{1}{3}}$$

با جایگذاری مقدار  $\delta$ :

$$\begin{aligned}\frac{\delta_c}{x} &= 4.64 \text{Re}^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{0.929}{Sc} \left[ 1 - \left( \frac{x_0}{x} \right)^{\frac{3}{4}} \right] \right\}^{\frac{1}{3}} \\ Sh_x &= \frac{k_x x}{D} = \frac{3}{4} \frac{D}{\delta_c} \frac{x}{D} = \frac{3}{2} \frac{x}{\delta_c} \\ &= \frac{3}{2} \left[ \frac{1}{4.64 \text{Re}^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{0.929}{Sc} \left[ 1 - \left( \frac{x_0}{x} \right)^{\frac{3}{4}} \right] \right\}^{\frac{1}{3}}} \right] \\ &= 0.323 \text{Re}^{\frac{1}{2}} Sc^{\frac{1}{3}} \left[ 1 - \left( \frac{x_0}{x} \right)^{\frac{3}{4}} \right]^{-\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

اگر انتقال جرم از نقطه  $x_0 = 0$  (لبه سطح) شروع شود،

$$\frac{\delta_c}{\delta} = 0.976(Sc)^{-\frac{1}{3}} \approx Sc^{-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\delta_c}{x} = 4.64(Re)^{-\frac{1}{2}}(Sc)^{-\frac{1}{3}}$$

$$Sh_x = \frac{3}{2} \left[ \frac{1}{4.64 Re^{-\frac{1}{2}} Sc^{-\frac{1}{3}}} \right] = 0.323 Re^{\frac{1}{2}} Sc^{\frac{1}{3}}$$

$$\bar{Sh}_{av} = \frac{\bar{k}_{av} L}{D_{AB}}$$

,

$$\bar{k}_{av} = \frac{\int_0^L k_x dx}{\int_0^L dx}$$

$$k_x = \frac{3 D_{AB}}{2 \delta_c} = \frac{2 D_{AB}}{2 \times 4.64 x Re^{-\frac{1}{2}} Sc^{-\frac{1}{3}}}$$

$$\overline{Sh}_{av} = 0.646 Re_L^{\frac{1}{2}} Sc^{\frac{1}{3}}$$

بنابراین:

$$\overline{Sh}_{av} = 2Sh_{x=L}$$

رابطه فوق به صورت تجربی تا حد  $Re_\ell = \frac{\rho U \ell}{\mu}$  برابر با ۸۰۰۰۰ مورد تأیید قرار گرفته است؛ که حاکی از صحت فرضیات صورت گرفته در روش تقریبی (VonKarman) می باشد.

انتقال جرم در لایه مرزی جریا متلاطم روی سطح افقی  
قانون توان یک هفتم پراندل بیانگر تغییرات سیال در لایه مرزی متلاطم به شرح زیر می باشد.

$$\frac{u}{u_\infty} = \left(\frac{Z}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}$$

براساس تشابه بین لایه مرزی غلظت و ممنتوم در بخش آرام می توان تصور نمود که رفتاری مشابه رفتار فوق در لایه مرزی غلظت در بخش متلاطم نیز وجود خواهد داشت یعنی:

$$\frac{\rho_A - \rho_{Ai}}{\rho_{A0} - \rho_{Ai}} = \frac{\rho'_A}{\rho'_{A0}} \left( \frac{Z}{\delta_c} \right)^{\frac{1}{7}}$$

روش تقریبی Von Karman برای لایه مرزی تلاطم و با سرعت  $V_0 = 0$  نوشته می شود.

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_c} (\rho'_{A0} - \rho'_A) u dZ = D \left. \frac{\partial \rho'_A}{\partial Z} \right|_{Z=0} = k_\rho \rho'_{A0}$$

با توجه به کار تجربی Eckert and Drake

$$\delta = 0.376 x Re_x^{-0.2}$$

این رابطه تا حد  $\frac{\rho U_\infty x}{\mu} < 10^7$  قابل قبول است. حال مهمترین فرض صورت گرفته این است که  $\delta|_x = \delta_c|_x$  که این مورد در عدد اشمیت برابر ۱ صحیح به نظر می رسد (بنابراین به نظر می رسد رابطه برای گازها صحیح تر باشد).

$$k_{\rho} = u_{\infty} \frac{d}{dx} \left\{ \delta \int_0^1 \left[ 1 - \left( \frac{Z}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} \right] \left( \frac{Z}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} d \left( \frac{Z}{\delta} \right) \right\}$$

$$k_{\rho} = \frac{7u_{\infty}}{72} \frac{d\delta}{dx}$$

$$Sh_x = \frac{k_{\rho} x}{D} = 0.0292 Re_x^{0.8}$$

$$\overline{Sh}_{aV} = \frac{\bar{k}_{\rho} L}{D} = 0.0365 Re_{x=L}^{0.8}$$

که  $\frac{d\delta}{dx}$  قابل دستیابی است، لذا: