بررسی انتقال جرم در خارج کره صلب در شرایط یکنواخت_ محیط اطراف کاملا ساکن است

کره‌ای به شعاع R در نظر بگیرید. انتقال جرم از کره به اطراف صورت می‌گیرد.

_ کره می‌تواند، کره جامد یا کره سیال صلب (همچون جامد) باشد.

_ شرایط عملیاتی دما و فشار ثابت است.

_ سیستم را دو جزئی در نظر گرفتیم. (برای سادگی کار)

_ فقط انتقال جرم از کره به اطراف صورت می‌گیرد

انتقال جرم را فقط در جهت شعاع در نظر می‌گیریم.

$$N_{Ar} = J_{Ar} + x_A (N_{Ar} + N_{Br})$$

$$N_{Br} = 0$$

فرض، غلظت کل ثابت است.

$$N_{Ar} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dr} + x_A N_{Ar}$$

$$N_{Ar} = -\frac{D_{AB}}{1-X_A} \frac{dC_A}{dr} = -\frac{D_{AB} C}{C-C_A} \frac{dC_A}{dr}$$

$$x_A = \frac{C_A}{C}$$

N_{Ar} فلاکس جزء A متغیر اما دبی انتقال جرم ثابت و برابر است با:

$$\dot{m_A} = N_{Ar} S_r M_A|_{r \geq R} = \text{ثابت} \quad , \quad S_r = 4\pi r^2$$

$$= -\frac{D_{AB} C}{C-C_A} 4\pi r^2 M_A \frac{dC_A}{dr}$$

$$\dot{m_A} \frac{dr}{r^2} = -\frac{D_{AB} C}{C-C_A} 4\pi M_A dC_A$$

بررسی شرایط مرزی: (BC_S)

غلظت روی سطح: (BC_1) $\quad r = R \quad , \quad C_A = C_{AS} = C_A^*$

غلظت درنقطه‌ای به فاصله r از مرکز کره: (BC_2) $\quad r = r\ (r>R) \quad , \quad C_A = C_A$

با اعمال شرایط مرزی:

$$\dot{m_A} = \frac{4\pi\, D_{AB}\, CM_A\, rR}{r-R} \ln \frac{C-C_A}{C-C_{AS}}$$

رابطه فوق، دبی جرمی از کره‌ای به شعاع R به نقطه‌ای به فاصله r از مرکز کره را می‌دهد.

رابطه $\dot{m_A} = N_{Ar}\, S_r\, M_A|_{r\geq R} = cte$ در حالت یکنواخت، بدون هیچ واکنش شیمیایی:

$$N_{Ar}\, S_r\, M_A|_r - N_{Ar}\, S_r\, M_A|_{r+\Delta r} = 0$$

$$S_R = 4\pi r^2$$

$$-\frac{d(N_{Ar}\, r^2)}{dr} = 0 \quad \text{یا} \quad N_{Ar}\, r^2 = cte$$

$$N_{Ar}\, 4\pi r^2\, M_A|_{r\geq R} = \text{ثابت} = \dot{m_A}$$

مثال – انتقال جرم از کره‌ای به شعاع R به نقطه‌ای به فاصله R ۲۰ از مرکز کره صورت می‌گیرد. مطلوبست مقدار عددی عدد شروود (طبق تعریف عدد شروود (Sh) برابر است با $Sh = \frac{Fd}{CD_{AB}}$ و $F = K_C\, C_{B,M}$ که $C_{B,M}$ متوسط لگاریتمی غلظت جزء B در مرز ۱و۲ ، $C_{B,M} = \frac{C_{B_2} - C_{B_1}}{\ln \frac{C_{B_2}}{C_{B_1}}}$ و d قطر کره است. در خصوص عدد شروود در فصل ۶ بیشتر بررسی خواهیم نمود.)

در خارج کره – تمامی فرضیات لازم نوشته شود.

حل: با توجه به روابط روابط فوق الذکر و تمامی فرضیات ذکر شده داریم:

$$\dot{m_A} = N_{Ar}\, S_r\, M_A|_{r\geq R} = \frac{4\pi\, M_A\, D_{AB}\, C\, r\, R}{r-R} \ln \frac{C-C_A}{C-C_{AS}}$$

از طرفی مقدار رفلاکس جرم از سطح کره به محیط اطراف را بصورت حاصلضریب k_c (ضریب انتقال جرم) در نیروی محرکه ΔC نیز می‌توان تعریف کرد.

فلاکس جرم از سطح کره به محیط اطراف:

$$N_{Ar}|_{r=R} = k_c\, \Delta C = k_c\, (C_{AS} - C_A)$$

$$\dot{m_A}|_{r=R} = N_{Ar}\, S M_A|_{r=R} = k_C\, (C_{AS} - C_A) 4\Pi R^2\, M_A$$

از تساوی دو رابطه فوق:

$$\frac{4\pi\, M_A\, D_{AB}\, Cr\, R}{r-R} \ln \frac{C-C_A}{C-C_{AS}} = k_C\, (C_{AS} - C_A) 4\Pi R^2\, M_A$$

$$C_A + C_B = C_{AS} + C_{BS} = C = \text{غلظت کل}$$

$$\frac{D_{AB}\,Cr}{r-R}\ln\frac{C_B}{C_{BS}} = k_c\,R\,(C_B - C_{BS})$$

$$C_{B,M} = \frac{C_B - C_{BS}}{\ln\frac{C_B}{C_{BS}}} \quad , \quad R = \frac{d}{2}$$

با جایگذاری در رابطه فوق:

$$\frac{k_c\,C_{B,M}\,d}{CD_{AB}} = \frac{2r}{r-R}$$

بنابراین:

$$Sh = \frac{2r}{r-R}$$

مثلا در حالت انتقال جرم به نقطه‌ای به فاصله $20R$ از مرکز کره:

$$r = 20R \quad , \quad Sh = \frac{2\times 20\,R}{20R-R} = 2.105$$

به همین ترتیب می‌توان جدول زیر را تکمیل نمود:

$\frac{r}{R}$	2	5	10	20	50	100	∞
Sh	4	2.5	2.22	2.105	2.04	2.02	2

انتقال جرم از کره به نقطه‌ای بسیار دور از مرکز کره

$$\frac{r}{R} = \infty \quad \text{یا} \quad r>>R \quad Sh = 2$$

تغییرات قطر کره با زمان:

برای کره می‌توان نوشت:

فرض: کره فقط از جنس A باشد.

$$\dot{m_1} - \dot{m_2} = \frac{dm}{dt}$$

$$\dot{m_1} = 0 \quad , \quad \dot{m_2} = \dot{m_A} \quad , \quad m = \text{جرم کره} = \rho_A V \quad , \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad , \quad R = \text{شعاع کره}$$

$$-\dot{m_A} = \rho_A \frac{dV}{dt} \quad \frac{4}{3}\pi\rho_A \times 3R^2 \frac{dR}{dt}$$

با جایگذاری مقدار $\dot{m_A}$

$$-\frac{4\pi M_A D_{AB} Cr R}{r-R} \ln\frac{C-C_A}{C-C_{AS}} = 4\pi\rho_A R^2 \frac{dR}{dt}$$

$$r \geq R \quad , \quad 0 \leq t \leq t \quad , \quad R_{\text{اولیه}} \leq R \leq R_t$$

$$t = \frac{\rho_A}{D_{AB} CM_A \ln\frac{C-C_A}{C-C_{AS}}}\left[\frac{1}{2}(R^2 - R_t^2) - \frac{1}{3r}(R^3 - R_t^3)\right]$$

این رابطه زمان لازم برای تغییر شعاع از R به R_t وقتی انتقال جرم در شرایط یکنواخت و از سطح کره به نقطه‌ای به فاصله r از مرکز کره صورت می‌گیرد را نشان می‌دهد.

مثال – قطره آبی به قطر ۰٫۱ اینچ را در فضای ساکن هوا و در دمای ۸۰° F و فشار اتمسفر و با مقدار رطوبت ۰٫۰۱۰۳۶ اتمسفر در نظر بگیرید. چه مدت طول می‌کشد تا قطره آب تبخیر شود.

آب : A هوا: B

حل:

$$R_t = 0 \quad , \quad r>>R \quad , \quad C = \frac{P_t}{RT} \quad , \quad C_A = \frac{P_A}{RT}$$

$$N_{Br} = 0 \quad , \quad 2R = 0.1 \text{ اینچ}$$

این رابطه برای حالت $\theta = \frac{\rho_A}{D_{AB} CM_A \ln\frac{C-C_A}{C-C_{AS}}}\left[\frac{1}{2}(R^2 - R_t^2) - \frac{1}{3r}(R^3 - R_t^3)\right]$ r>>R به صورت زیر ساده می‌شود:

$$t = \frac{\rho_A R^2}{2D_{AB} CM_A \ln\frac{C-C_A}{C-C_{AS}}}$$

به لحاظ تبخیر آب و کاهش دمای آن به دمای بالاتر (با استفاده از منحنی رطوبت، دمای سطح $T = 60^\circ F$) لذا:

$P_{AS} = \text{فشار بخار در دمای سطح } (T = 60^\circ F) = 0.01743 \text{ atm}$

ضریب نفوذ در دمای متوسط لایه ($\frac{60+80}{2} = 70^\circ F$) بدست می‌آید.

$$D_{AB\,(T=70^\circ F)} = D_{H2O-Air} = 1.01 \frac{ft^2}{hr}$$

$$\rho_A = 62.43 \frac{lb}{ft^2} \quad , \quad C = \frac{P_t}{RT} = \frac{(1)}{(0.73)(460+70)}$$

بنابراین:

$$t = \frac{(62.43)(0.73)(\frac{0.05}{12})(460+70)}{(2)(1.01)(1)(18)(\frac{1-0.01036}{1-0.01743})} = 1.61hr$$

مثال –اطراف یک قطعه جامد کاتالیستی کروی با لایهء گازی پوشیده شده است. این لایهء گازی همچون یک تیغه‌ی کروی یا قطر داخلی r_1 و قطر خارجی r_2 می‌باشد. مطلوبست:

الف: تغییرات غلظت جزء A که از درون تیغه کروی از سطح ۱ به ۲ در شرایط یکنواخت در حال انتقال می‌باشد.

ب: دبی انتقال جرم را در تیغه بدست آورید.

ج: اگر تیغه کروی به صورت غیرایزوترم عمل نماید به طوری که رابطه $\frac{T}{T_1} = (\frac{r}{r_1})^n$ در تیغه حاکم باشد، دبی انتقال جرم در این حالت چقدر خواهد بود؟

حل: لایه انتقال جرم گازی است. از حرکت توده‌ای درون لایه صرف نظر نمی‌کنیم.

$$N_{Ar} = J_{Ar} + x_A\,(N_{Ar} + N_{Br})$$

$$N_{Br} = 0 \quad , \quad N_{Ar} = -D_{AB}\frac{dC_A}{dr} + x_A N_{Ar}$$

$$N_{Ar} = -\,C\,D_{AB}\frac{1}{1-X_A}\frac{dx_A}{dr}$$

واکنش شیمیایی در لایه گازی نداریم و شرایط یکنواخت است.

$$N_{Ar}\,S\big|_r - N_{Ar}\,S\big|_{r+\Delta r} = 0 \quad , \quad S = 4\pi r^2$$

$$\frac{d}{dr}\,(r^2\,N_{Ar}) = 0$$

$$\frac{d}{dr}\,(-\,r^2\,\frac{CD_{AB}}{1-x_A}\frac{dx_A}{dr}) = 0$$

نظیر مثال ۹ داریم:

$$\left[\frac{x_{B1}}{x_{B2}}\right] = \left[\frac{x_{B2}}{X_{B1}}\right]^{\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}}$$

تغییرات غلظت در لایه

ب:

$$\dot{m_A} = M_A\,N_{Ar}\,S\big|_{r\geq r1} = M_A\,N_{Ar}\,4\pi r_1^2\big|_{r=r1}$$

$$N_{Ar}\big|_{r=r1} = -\,CD_{AB}\frac{1}{1-X_A}\frac{dX_A}{dr}\big|_{r=r1}$$

از تغییرت غلظت بر حسب r، مقدار $\frac{dX_A}{dr}$ را در نقطه $r = r_1$ بدست آورده و در رابطه فوق قرار می‌دهیم.

$$\dot{m_A} = \frac{4\pi\, C D_{AB}\, M_A}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \ln \frac{X_{B2}}{X_{B1}}$$

رابطه فوق به راحتی از رابطه زیر قابل دستیابی است.

$$\dot{m_A} = N_{Ar}\, \bar{S}_{av}\, M_A$$

$$N_{Br} = 0 \quad , \quad N_{Ar} = \frac{N_{Ar}}{N_{Ar} + N_{Br}} \frac{D_{AB}\, C}{\delta} \ln \frac{\frac{N_{Ar}}{N_{Ar}+N_{Br}} - X_{A_2}}{\frac{N_{Ar}}{N_{Ar}+N_{Br}} - X_{A_1}}$$

$$\delta = r_2 - r_1$$

$$N_{Ar} = \frac{D_{AB}\, C}{r_2 - r_1} \ln \frac{1 - X_{A_2}}{1 - X_{A_1}}$$

$$N_{Ar} = \frac{D_{AB}\, C}{r_2 - r_1} \ln \frac{1 - X_{B_2}}{1 - X_{B_1}}$$

$$\bar{S}_{av} = 4\Pi r^2 = 4\Pi r_1 r_2$$

$$\dot{m_A} = \frac{4\Pi r_1 r_2\, C D_{AB}\, M_A}{r_2 - r_1} \ln \frac{X_{B2}}{X_{B1}}$$

ج: در صورت غیر ایزوترم بودن لایه، با توجه به رابطه ضرایب نفوذ با دما در گازها داریم:

$$\frac{D_{AB}}{D_{AB1}} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{3n}{2}}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{C D_{AB1}}{1 - X_A} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{3n}{2}} \frac{dX_A}{dr}\right) = 0$$

$$\dot{m_A} = 4\pi r_1^2\, M_A\, N_{Ar}\big|_{r=r1} = \frac{4\pi \left(\frac{P D_{AB}}{R T_1}\right)\left(1 + \frac{n}{2}\right)}{r_1^{-1\frac{n}{2}} - r_2^{-1\frac{n}{2}} (r_1)^{\frac{n}{2}}} \ln \frac{X_{B2}}{X_{B1}}$$