انتقال جرم در فیلم مایع در حال ریزش

انتقال جرم از فاز گاز به فیلم مایع در حال ریزش روی دیوارهٔ عمودی- شرایط یکنواخت

فیلم نازک مایع روی دیواره عمودی به سمت پایین در حال حرکت است. جریان کاملاً آرام است و انتقال جرم از فاز گاز به مایع صورت می‌گیرد. با بیلان در لایهٔ نازک (عمود بر جهت انتقال جرم) سعی می‌کنیم به رابطهٔ کلی انتقال جرم در این حالت برسیم. فرض می‌شود انتقال جرم فقط در جهت X و Z صورت می‌گیرد و از انتقال جرم در جهت y که بسیار کم است، صرف نظر می‌شود. بنابراین با توجه به المان در شکل ۶-۲:

$$\text{تجمع} = \text{جرم تولیدی یا مصرفی} \pm \text{جرم خروجی} - \text{جرم ورودی}$$

$$\text{جرم ورودی در جهت } X = M_A\left(\Delta Z w N_{AX}\Big|_x\right)$$

$$\text{جرم خروجی در جهت } X = M_A\left(\Delta Z w N_{AX}\Big|_{x+\Delta x}\right)$$

به ترتیب فوق جرم ورودی و خروجی در جهت Z را می‌توان نوشت (توجه: شرایط یکنواخت بوده، جرم تولیدی یا مصرفی در اثر واکنش شیمیایی نداریم)

$$M_A(\Delta x\, w\, N_{Az}|_z - \Delta x\, w\, N_{Az}|_{z+\Delta z} + \Delta z\, w\; N_{Ax}|_x - \Delta z\, w\; N_{Ax}|_{x+\Delta x}) = 0$$

$$-\left(\frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial N_{AZ}}{\partial Z}\right) = 0$$

جریان کاملاً آرام، در آن موضع خاص:

$$N_{Ax} = \underbrace{J_{\mathrm{Ax}}}_{\text{نفوذ مولکولی}} + \underbrace{x_{\mathrm{A}} \sum N_{\mathrm{ix}}}_{\text{حرکت توده ای}}$$

از حرکت توده‌ای (Bulk) در جهت x صرف‌نظر می‌شود (نوع Bulk در جهت x کنوکسیون طبیعی است که در مقایسه با نفوذ مولکولی قابل صرف نظر کردن می‌باشد). حلالیت A در مایع بسیار کم و به لحاظ حلالیت کم، فرض می‌شود که دانسیته و ویسکوزیته سیال مایع تغییری نکرده است.

$$J_{\mathrm{Ax}} = -D_{\mathrm{AB}} \frac{\partial C_{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{x}}$$

در جهت Z از نفوذ مولکولی در مقایسه با حرکت توده‌ای سیال صرف نظر می‌شود (نوع Bulk در جهت Z از نوع کنوکسیون اجباری است که در مقایسه با نفوذ مولکولی، زیاد و لذا از نفوذ مولکولی در این جهت صرف‌نظر می‌شود).

$$N_{\mathrm{AZ}} = J_{\mathrm{AZ}} + x_{\mathrm{A}} \sum N_{\mathrm{iZ}} = C_{\mathrm{A}} V_{\mathrm{Z}} \quad , \qquad V_{\mathrm{Z}} = f(x)$$

D_{AB} ثابت، غلظت کل ثابت است.

$$\frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} = D_{AB}\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2}$$

بنابراین:

$$\frac{\partial N_{Ax}}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial Z}(C_A V_Z) = V_Z\frac{\partial C_A}{\partial Z}$$

$$(*) V_Z\frac{\partial C_A}{\partial Z} = D_{AB}\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2}$$

رابطهٔ فوق (رابطهٔ ✻) را می‌توان با استفاده از رابطهٔ کلی پیوستگی در مختصات کارتزین و با توجه به فرضیات فوق‌الذکر نیز بدست آورد.

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \left(V_x\frac{\partial C_A}{\partial x} + V_y\frac{\partial C_A}{\partial y} + V_z\frac{\partial C_A}{\partial z}\right) = D_{AB}\left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2}\right) + R_A$$

شرایط یکنواخت $\frac{\partial C_A}{\partial t} = 0$

حرکت توده‌ای در مقایسه با نفوذ (در جهت x) صرف نظر می‌شود.

$$V_x \frac{\partial C_A}{\partial x} = 0$$

در جهت y انتقال جرم نداریم.

$$V_y \frac{\partial C_A}{\partial y} = 0 \quad \text{و} \quad D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} = 0$$

نفوذ مولکولی در مقایسه با حرکت توده‌ای (در جهت Z) صرف نظر می‌شود، $D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} = 0$

$$V_Z \frac{\partial C_A}{\partial Z} = D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} \quad \text{و} \quad C_A = C_A(x, Z)$$

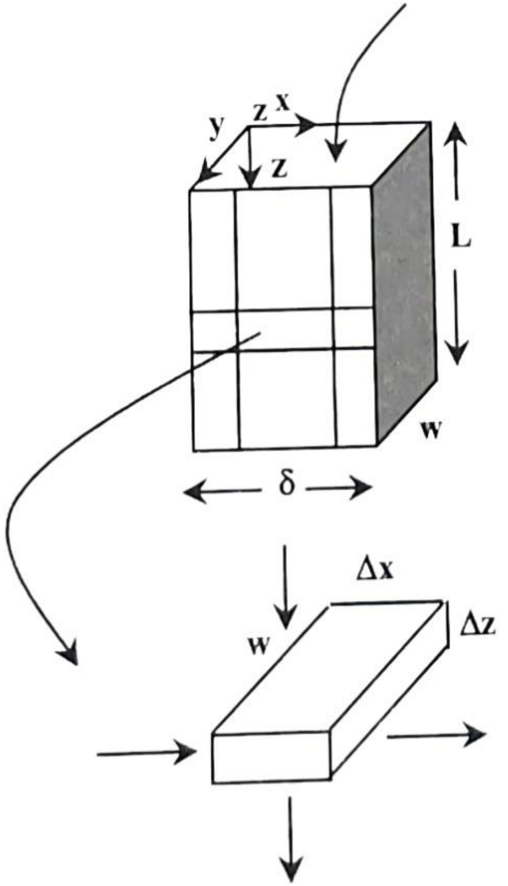
بیلان ممنتوم (از مکانیک سیالات) نتیجه می‌دهد پروفایل سرعت در جریان آرام:

$$V_Z = \frac{\rho g \delta^2}{2\mu}\left[1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right]$$

$$\bar{V}_Z = \frac{\int_0^\delta V_Z dx}{\int_0^\delta dx} = \frac{\rho g \delta^2}{3\mu}$$

$$\delta = \left(\frac{3\bar{V}_Z \mu}{\rho g}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3\mu\Gamma}{\rho^2 g}\right)^{\frac{1}{3}}$$

دبی جرمی مایع به ازاء عرض واحد $(w=1)$:



$$V_Z = \frac{3}{2}\bar{V}_Z\left[1-\left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right]$$

$$V_{Z_{max}} = \frac{3}{2}\bar{V}_Z$$

$$V_Z = V_{Z_{max}}\left[1-\left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right]$$

بنابراین:

$$\frac{3}{2}\bar{V}_Z\left[1-\left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right]\frac{\partial C_A}{\partial Z} = D_{AB}\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2}$$

با اعمال شرایط مرزی:

BC_1 $\quad Z = 0 \quad x = x \quad C_A = C_{A_0} =$ غلظت اولیه

BC_2 $\quad Z = Z \quad x = 0 \quad C_A = C_{Ai} =$ غلظت در فصل مشترک

BC_3 $\quad Z = Z \quad x = \delta \quad \left.\frac{\partial C_A}{\partial x}\right|_{x=\delta} =$ عدم نفوذ از دیواره

حل معادله دیفرانسیل جزئی فوق با شرایط مرزی و به روش جداسازی متغیرها منجر به رابطهٔ زیر می‌شود.

$$\frac{C_{Ai} - \bar{C}_{AL}}{C_{Ai} - C_{A_0}} = 0.7857e^{-5.1213\eta} + 0.1001e^{-39.18\eta} + 0.03599e^{-105.96\eta} + 0.01811e^{-204.75\eta} + \cdots$$
(**)

و یا:

$$\frac{C_{Ai}-\bar{C}_{AL}}{C_{Ai}-C_{A_0}} = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e^{-\beta_i\eta}$$

مقادیری از α_j و β_j در رابطهٔ فوق ارائه شده و نیز،

$$\eta = \frac{2D_{AB}L}{3\delta^2 \bar{V}_Z} = \frac{2D_{AB}L\mu}{\delta^4 \rho g}$$

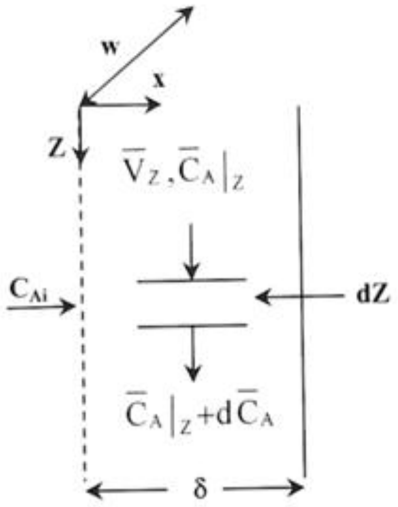
$$\bar{C}_{AL} = \frac{\int_0^\delta C_A|_{Z=L} dx}{\int_0^\delta dx}$$

چگونگی تغییرات $\frac{C_{Ai}-\bar{C}_{AL}}{C_{Ai}-C_{A_0}}$ برحسب η توسط Nusselt ارائه شده است.

اگر غلظت در فصل مشترک C_{A_i}، غلظت در حد اشباع تلقی شود، آنگاه نسبت $\frac{\bar{C}_{AL}-C_{A_0}}{C_{Ai}-C_{A_0}}$ را می‌توان $\frac{\text{انتقال جرم صورت گرفته}}{\text{حداکثر انتقال جرم ممکن}}$ یا راندمان نیز تعریف نمود.

دستیابی به ضریب انتقال جرم متوسط

با توجه به شکل مقابل:



جرم انتقالی به المان در اثر نفوذ= جرم خروجی از المان توسط حرکت مایع

$$\bar{V}_Z \delta w (\bar{C}_A|_z + d\bar{C}_A) - \bar{V}_Z \delta w \bar{C}_A|_z = wdZN_{Ax}|_{x=0}$$

$$wdZk(C_{Ai} - \bar{C}_A)$$

K ضریب انتقال جرم در موضع خاص و w عرض مایع روی دیواره می‌باشد.

$$\bar{V}_Z\delta d\bar{C}_A = k(C_{Ai} - \bar{C}_A)dZ$$

$$\bar{V}_Z\delta \int_{C_{A_0}}^{\bar{C}_{A,L}} \frac{d\bar{C}_A}{C_{Ai}-\bar{C}_A} = \int_0^L kdZ$$

$$k_{av} = \frac{\bar{V}_Z\delta}{L}\ln\frac{C_{Ai}-C_{A_0}}{C_{Ai}-\bar{C}_{AL}} \quad (3*)$$

ضریب انتقال جرم k_{av} مقدار ضریب انتقال جرم متوسط در طول دیواره می‌باشد $(0-L)$، که ثابت فرض شده است. بنابراین مقدار k_{av} برای هر موضع بین صفر تا L نیز در صورت نیاز استفاده خواهد شد. حال دو حالت خاص زمان تماس زیاد بین دو فاز و زمان تماس کم بین دو فاز را بررسی می‌کنیم.

زمان تماس طولانی بین دو فاز

زمان تماس زیاد بین دو فاز و یا سرعت سیال بسیار کم، در این حالت فقط اولین ترم از رابطهٔ (**) استفاده شده، از بقیه ترم‌ها می‌توان صرف نظر نمود (در این حالت مقدار η بسیار زیاد خواهد بود).

$$\ln\frac{C_{Ai}-C_{A_0}}{C_{Ai}-\bar{C}_{AL}} = \ln\frac{1}{0.7857e^{-5.1213\eta}} = 0.241 + 5.1213\eta$$

جایگذاری از رابطهٔ (3*):

$$\frac{k_{av}\mathrm{L}}{\bar{V}_{\mathrm{Z}}\delta} = 0.241 + 5.1213\eta$$

$$k_{av} = 0.2412\frac{\bar{V}_{\mathrm{Z}}\delta}{L} + 5.1213\frac{2D_{AB}}{3\delta}$$

با توجه به مقدار کوچک $\bar{V}_{\mathrm{Z}}$ و اینکه δ در مقایسه با L بسیار کوچک خواهد بود، از ترم اول رابطهٔ فوق در مقایسه با ترم دوم صرف نظر می‌شود. بنابراین:

$$k_{av} = 3.414\frac{D_{AB}}{\delta}$$

$$\frac{k_{av}\delta}{D_{AB}} = Sh_{av} = 3.414$$

کل جرم منتقل شده

کل جرم انتقالی به فیلم مایع برابر است با:

$$W_{\mathrm{A}} = M_{\mathrm{A}}\bar{V}_{\mathrm{Z}}\delta \mathrm{w}\left(\bar{\mathrm{C}}_{\mathrm{AL}} - \mathrm{C}_{\mathrm{A}_0}\right)$$

از طرفی می‌توان با استفاده از معادلات سرعت مقدار کل انتقال جرم را نیز بدست آورد.

$$W_A = M_A L w k_{av}(C_{Ai} - \bar{C}_{Am})$$

که C_{Ai} غلظت در فصل مشترک و $\bar{C}_{Am}$ غلظت متوسط در تودهٔ سیال و در سرتاسر دیواره است که به صورت زیر قابل دستیابی است. از تساوی دو رابطهٔ فوق برای W_A، و جایگذاری مقدار k_{av} از رابطهٔ (*3):

$$M_A \bar{V}_Z \delta w\left(\bar{C}_{AL} - C_{A_0}\right) = M_A L w k_{av}(C_{Ai} - \bar{C}_{Am})$$

$$k_{av} = \frac{\bar{V}_Z \delta}{L} \ln \frac{C_{Ai} - C_{A_0}}{C_{Ai} - \bar{C}_{AL}}$$

بنابراین:

$$M_A \bar{V}_Z \delta w\left(\bar{C}_{AL} - C_{A_0}\right) = M_A L w \frac{\bar{V}_Z \delta}{L} \ln \frac{C_{Ai} - C_{A_0}}{C_{Ai} - \bar{C}_{AL}} (C_{Ai} - \bar{C}_{Am})$$

$$(C_{Ai} - \bar{C}_{Am}) = \frac{\bar{C}_{AL} - C_{A_0}}{\ln\frac{C_{Ai} - C_{A_0}}{C_{Ai} - \bar{C}_{AL}}} = \frac{(C_{Ai} - C_{A_0})(C_{Ai} - \bar{C}_{AL})}{\ln\frac{C_{Ai} - C_{A_0}}{C_{Ai} - \bar{C}_{AL}}}$$

$= \left(C_{Ai} - \bar{C}_A\right)_{L,M} =$ (طبق تعریف فوق)متوسط لگاریتمی

بنابراین مقدار انتقال جرم کلی صورت گرفته با استفاده از معادلهٔ سرعت به صورت زیر خواهد بود:

$$W_{A} = M_{A} L w k_{av} (C_{Ai} - \bar{C}_{A})_{L,M}$$

زمان تماس کم بین دو فاز

بازگشت به رابطهٔ (۶-۳۷) و بررسی زمان تماس کم بین دوفاز (Sherwood-Pigford) حاکی از آن است که در این حالت، $\frac{L}{V_{max}}$ بسیار کم، $x \ll \delta$ و $\left(\frac{x}{\delta}\right)^2 \ll 1$ بوده و با توجه به رابطهٔ بدست آمده از مکانیک سیالات داریم:

$$V_{Z} = V_{Zmax}$$

بنابراین فرمول در حالت زمان تماس کم به صورت زیر در می‌آید:

$$V_{max} \frac{\partial C_{A}}{\partial Z} = D_{AB} \frac{\partial^2 C_{A}}{\partial x^2}$$

با استفاده از روش Combination method یا Substitution (ضمیمه ۶-۳)، معادلهٔ دیفرانسیل جزئی فوق حل می‌شود. بنابراین:

$$\frac{C_A - C_{A_0}}{C_{Ai} - C_{A_0}} = 1 - \operatorname{erf}\frac{x}{\sqrt{4DZ/V_{max}}} = \operatorname{erfc}\frac{x}{\sqrt{4DZ/V_{max}}}$$

اگر غلظت اولیه در فیلم $C_{A_0} = 0$ باشد، آنگاه:

$$\frac{C_A}{C_{Ai}} = \operatorname{erfc}\frac{x}{\sqrt{4DZ/V_{max}}}$$

کل جرم منتقل شده

کل جرم انتقالی در این حالت:

$$W_A = M_A \int_0^W \int_0^L N_{Ax}|_{x=0}\, dydZ$$

$$N_{Ax}|_{x=0} = -D \left.\frac{\partial C_A}{\partial x}\right|_{x=0}$$

با استفاده از رابطهٔ فوق (پروفایل غلظت)، اگر $C_{A_0} = 0$ باشد (جزئیات حل در ضمیمه)،

$$\left.\frac{\partial C_A}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{C_{Ai}\sqrt{4V_{max}}}{\sqrt{\pi DZ}}$$

بنابراین:

$$W_A = wLM_A\sqrt{\frac{4D_{AB}V_{max}}{\pi L}}C_{Ai}$$

ضریب انتقال جرم متوسط

با توجه به زمان تماس کم، نیروی محرکه در این حالت در سرتاسر مسیر انتقال جرم به صورت $C_{Ai} - C_{A_0}$ باقی می‌ماند، لذا می‌توان کل انتقال جرم صورت گرفته را با استفاده از معادله سرعت زیر بدست آورد.

$$W_A = wLM_A k_{av}\left(C_{Ai} - C_{A_0}\right)$$

از طرفی:

$$W_A = wLM_A\sqrt{\frac{4D_{AB}V_{max}}{\pi L}}\left(C_{Ai} - C_{A_0}\right)$$

بنابراین:

$$k_{av} = \sqrt{\frac{4D_{AB}V_{max}}{\pi L}}$$

از طرفی:

$$V_{max} = \frac{3}{2}\bar{V} = \frac{3}{2}\frac{\Gamma}{\rho\delta}$$

بنابراین:

$$k_{av}=\sqrt{\frac{6D_{AB}\Gamma}{\pi\rho\delta L}}$$

با توجه به تعریف اعداد بدون بعد $Sh=\frac{k_{av}\delta}{D_{AB}}$ و $Sc=\frac{\mu}{\rho D_{AB}}$ و $Re=\frac{4\Gamma}{\mu}$، آنگاه:

$$Sh_{av}=\left(\frac{3}{2\pi}\frac{\delta}{L}ReSc\right)^{\frac{1}{2}}$$

زمان تماس کوتاه و رابطهٔ Kramers and kreyger

Kramers and kreyger از رابطهٔ زیر که در زمان تماس کوتاه اتفاق خواهد افتاد استفاده کرده‌اند.

$$V_Z\frac{\partial C_A}{\partial Z}=D_{AB}\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2}$$

که:

$$V_Z=ax$$

مقدار a با توجه به اطلاعات موجود در مکانیک سیالات قابل دستیابی بوده و اعمال شرایط مرزی به صورت زیر و حل معادلهٔ دیفرانسیل جزئی فوق (جزئیات در ضمیمه ۶-۴) منجر به رابطهٔ زیر خواهد شد:

شرایط مرزی:

غلظت اولیه	$C_A = 0$	$x \geq 0$	$Z = 0$
غلظت در فصل مشترک	$C_A = C_{Ai}$	$x = 0$	$Z > 0$

بنابراین:

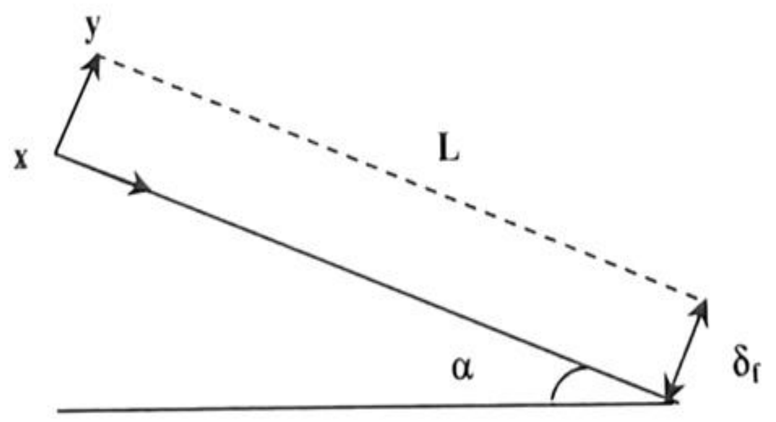
$$Sh = \frac{k_{av}L}{D_{AB}} = 0.783 Re^{\frac{1}{9}} Sc^{\frac{1}{3}} \left(\frac{L^3 \rho^2 g}{\mu^2}\right)^{\frac{2}{9}}$$

که مقادیر Re و Sc قبلاً تعریف شده‌اند.

انتقال جرم از جامد به فیلم مایع در حال ریزش روی دیوارهٔ شیب‌دار

انتقال جرم از سطح جامد به سیال مایع در حال حرکت روی دیواره شیب‌دار را بررسی می‌کنیم. حرکت سیال کاملاً آرام است. میزان حلالیت A (از سطح جامد، جزء انتقالی) بسیار کم و لذا می‌توان از حرکت توده‌ای در جهت y صرف‌نظر نمود. با استفاده از بیلان در لایه نازک عمود بر جهت انتقال جرم یا استفاده از معادلهٔ پیوستگی:

$$\underbrace{\frac{\partial C_A}{\partial t}}_{\text{شرایط یکنواخت}=0} + \left(u_x \frac{\partial C_A}{\partial x} + \underbrace{u_y \frac{\partial C_A}{\partial y}}_{\text{صرف نظر}} + \underbrace{u_z \frac{\partial C_A}{\partial Z}}_{u_z=0} \right) = D_{AB} \left(\underbrace{\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2}}_{\text{صرف نظر}} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 C_A}{\partial Z^2}}_{=0} \right) + \underbrace{R_A}_{=0}$$



شکل: فیلم مایع در حال ریزش روی دیوارهٔ شیب‌دار در حال حل در فیلم

$$u_x \frac{\partial C_A}{\partial x} D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2}$$

حالت خاص ۱

گرادیان سرعت در لایه‌های چسبیده به جامد خطی فرض شده و لذا:

$$u_x = \beta y$$

که β مقدار ثابتی است (Kramers & kreyger).

این حالت شبیه انتقال جرم در فیلم نازک در حال ریزش روی دیوارهٔ عمودی با فرض خطی بودن سرعت سیال (که قبلاً بررسی شده است) می‌باشد. اعمال شرایط مرزی:

قبل از تماس—غلظت اولیه $\quad C_A = C_{A_0} \qquad y \geq 0 \quad , \quad x = 0$

غلظت در سطح تماس $\quad C_A = C_{Ai} \qquad y = 0 \quad , \quad x > 0$

حلالیت کم، عدم نفوذ تا بالاترین نقطه $\quad C_A = C_{A_0} \qquad y \approx \delta_f \quad , \quad x > 0$

سرعت نفوذ در مقایسه با ضخامت فیلم بسیار کم است یا زمان تماس فوق‌العاده کوتاه است. لذا شرط مرزی سوم به صورت زیر خواهد شد:

$$x > 0 \quad , \quad y \approx \infty \qquad C_A = C_{A_0}$$

می‌توان نشان داد (جزئیات حل در ضمیمه ۶-۴):

$$C_A = C_A(x,y) \quad , \quad \frac{C_A - C_{A_0}}{C_{Ai} - C_{A_0}} = \frac{\int_{\eta}^{\infty} \exp(-\eta^3)\, d\eta}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}$$

$$\eta = y\left(\frac{\beta}{D_{AB}x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ضریب انتقال جرم موضعی، متوسط و کل انتقال جرم صورت گرفته:

$$N_{Ax} = k_x\left(C_{Ai} - C_{A_0}\right) = -D_{AB} \left.\frac{\partial C_A}{\partial y}\right|_{\substack{y=0 \\ x=x}}$$

$$k_x = -\frac{D_{AB}}{C_{Ai} - C_{A_0}} \left.\frac{\partial C_A}{\partial y}\right|_{\substack{y=0 \\ x=x}}$$

از طرفی (با فرض $C_{A_0} = 0$):

$$k_{av} = \frac{\int_0^L k_x dx}{\int_0^L dx} = 0.808 D_{AB} \left(\frac{\beta}{D_{AB} L}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$Sh_{av} = \frac{k_{av} L}{D_{AB}} = 0.808 L \left(\frac{\beta}{D_{AB} L}\right)^{\frac{1}{3}}$$

با دستیابی به مقدار β، می‌توان به Sh_{av} دست یافت:

$$\beta = \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0} \quad , \quad u = \frac{\rho g \sin\alpha}{\mu}\left(\delta_f y - \frac{y^2}{2}\right)$$

$$\beta = \frac{\delta_2 \rho g \sin\alpha}{\mu}$$

با جایگذاری مقدار β و تعریف عدد رینولدز و اشمیت داریم:

$$Sh_{av} = 0.783\, Re^{\frac{1}{9}} Sc^{\frac{1}{3}} \left(\frac{L^3 \rho^2 g \sin\alpha}{\mu^2}\right)^{\frac{2}{9}}$$

رابطهٔ فوق توسط Kramers and Kreyger از حل شدن اسید بنزوئیک در فیلم مایع آب برای حالتی که $5 \le L < 80$ mm و $\alpha = 6.45$ و طول ورودی اولیه 330 mm بوده است مورد ارزیابی و تأیید قرار گرفته است. در آزمایشات آنها حرکت مایع با $Re < 2000$ گزارش شده است.

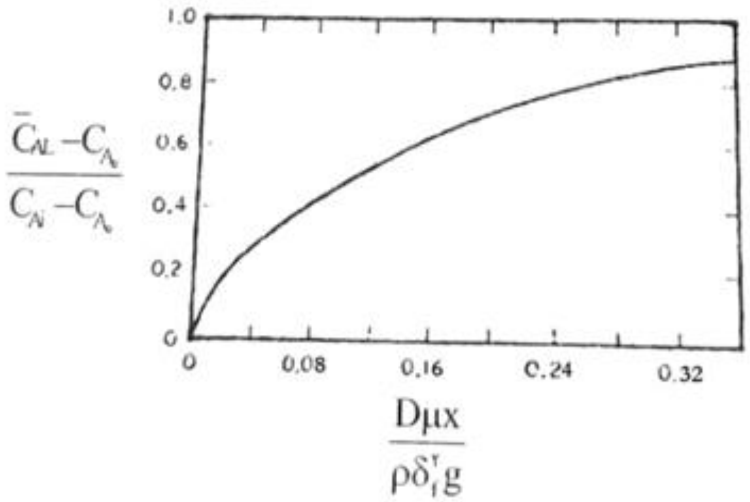
حالت خاص ۲: اگر شرایط به گونه‌ای باشد که انتقال جرم تا آن‌طرف منطقهٔ خطی بودن گرادیان سرعت، نفوذ نماید یا به عبارتی بهتر رابطهٔ کلی سرعت در این حالت به شرح زیر مورد استفاده قرار گیرد،

$$U = \frac{\rho g \sin\alpha}{\mu}\left(\delta_f y - \frac{y^2}{2}\right)$$

و یا:

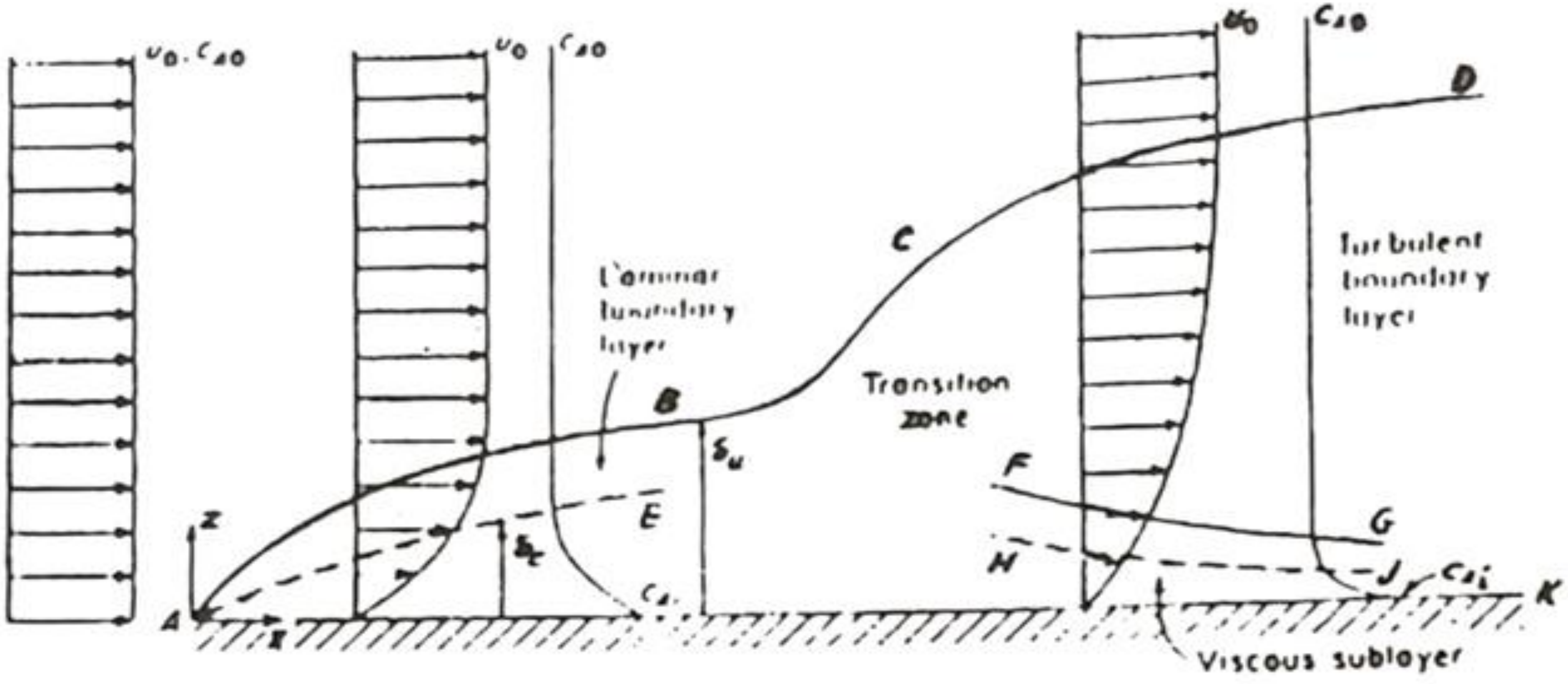
$$\frac{\rho g \sin\alpha}{\mu}\left(\delta_f y - \frac{y^2}{2}\right)\frac{\partial C_A}{\partial x} = +D_{AB}\frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2}$$

حل عددی رابطهٔ فوق در شکل زیر آمده است.



شکل انتقال جرم از جامد به فیلم مایع در حال ریزش- جریان آرام

انتقال جرم به سیال در حال حرکت روی سطح افقی در جریان آرام



شکل لایه‌های مرزی روی صفحه افقی جامد

حل دقیق:

با استفاده از معادلات کلی پیوستگی و با توجه به آنکه از هرگونه تغییرات غلظت در جهت y صرف‌نظر شده است، واکنش شیمیایی نداشته و حالت یکنواخت بررسی می‌شود. لذا:

$$u_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + u_Z \frac{\partial U_Z}{\partial Z} = v\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial Z^2}\right)$$

$$u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_Z \frac{\partial T}{\partial Z} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2}\right)$$

$$u_x \frac{\partial C_A}{\partial x} + u_Z \frac{\partial C_A}{\partial Z} = D_{AB}\left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial Z^2}\right)$$

با تغییر متغیرهای زیر و اعمال شرایط مرزی در روابط فوق و با صرف‌نظر از نفوذ در جهت حرکت سیال می‌توان نوشت:

تغییر متغیرها:

$$u' = \frac{u_x - u_x|_{Z=0}}{u_0 - u_x|_{Z=0}} \quad , \quad C'_A = \frac{C_A - C_{Ai}}{C_{A_0} - C_{Ai}} \quad , \quad T' = \frac{T - T_i}{T_0 - T_i}$$

که C_{Ai}، T_i غلظت و دما در $Z = 0$ هستند.

شرایط مرزی:

$$Z = 0 \qquad u_x\Big|_{Z=0} = 0 \quad , \qquad C_A = C_{Ai} \quad , \qquad T = T_i \quad , \qquad u' = C'_A = T' = 0$$

$$Z = \infty \qquad u_x\Big|_{Z=\infty} = u_0 \quad , \qquad C_A = C_{A_0} \quad , \qquad T = T_0 \quad , \qquad u' = C'_A = T' = 1$$

$$x = 0 \qquad u_x\Big|_{Z=Z} = u_0 \quad , \qquad C_A = C_{A_0} \quad , \qquad T = T_0 \quad , \qquad u' = C'_A = T' = 1$$

صرف‌نظر از نفوذ در جهت حرکت سیال:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_Z \frac{\partial u_z}{\partial Z} = v \frac{\partial^2 u_x}{\partial Z^2}$$

$$u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_Z \frac{\partial T}{\partial Z} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2}$$

$$u_x \frac{\partial C_A}{\partial x} + u_Z \frac{\partial C_A}{\partial Z} = D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial Z^2}$$

ملاحظه می‌شود حل معادلات لایه مرزی، با شرایط مرزی یکسان و در صورت تساوی $v = \alpha = \mathrm{D_{AB}}$ (که در این صورت $Pr = \frac{\gamma}{\alpha}$ و $Sc = \frac{v}{D}$ و $Pr = Sc = 1$ خواهد شد) و استفاده از روابط پیوستگی به روابط نهایی یکسانی ختم خواهد شد.

$$\mathrm{Nu_x} = \text{عدد ناسلت موضعی} = \frac{h_x x}{k} = 0.332\, Re_x^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}$$

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{av} = \frac{\bar{h} L}{k} = 0.664\, Re_L^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}$$

و نیز در انتقال جرم

$$Sh_x = \frac{f_x x}{\mathrm{CD_{AB}}} = 0.332\, Re_x^{\frac{1}{2}} Sc^{\frac{1}{3}}$$

$$\overline{Sh}_{av} = \frac{\bar{F} L}{\mathrm{CD_{AB}}} = 0.664\, Re_L^{\frac{1}{2}} Sc^{\frac{1}{3}}$$

روش تقریبی (Von Karman)

روش دیگری در این رابطه برای حل مسئله و دستیابی به رابطه‌ای برای انتقال جرم در لایهٔ مرزی آرام ارائه شده است. در این روش با استفاده از بیلان کلی و بیلان جزئی (برای جزء A) و دستیابی به پروفایل سرعت و غلظت در لایهٔ مرزی به رابطهٔ ضریب انتقال جرم موضعی خواهیم رسید و سپس ضریب انتقال جرم متوسط و مقدار انتقال جرم موضعی یا کلی قابل دستیابی است.

ضریب انتقال جرم موضعی

با استفاده از معادلات سرعت:

$$N_{A_0} = k_X\left(C_{Ai} - C_{A_0}\right) = -D_{AB}\left.\frac{\partial C_A}{\partial Z}\right|_{z=0}$$

اگر پروفایل غلظت در هر نقطه‌ای مانند x در لایهٔ مرزی به صورت زیر فرض شود:

$$C_A - C_{Ai} = a + bz + cz^2 + dz^3$$

و نیز:

$$Z = 0 \qquad C_A = C_{Ai} \qquad \therefore \qquad a = 0$$

$$Z = \delta_c \qquad C_A = C_{A_0} \qquad \therefore \qquad C_{A_0} - C_{Ai} = b\delta_c + c\delta_c^2 + d\delta_c^3$$

$$Z = \delta_c \qquad \frac{\partial C_A}{\partial Z} = 0 \qquad \therefore \qquad b + 2c\delta_c + 3d\delta_c^2 = 0$$

(عدم وجود نیروی محرکه)

$$Z = 0 \qquad \frac{\partial^2 C_A}{\partial Z^2} = 0 \qquad \therefore \qquad C = 0$$

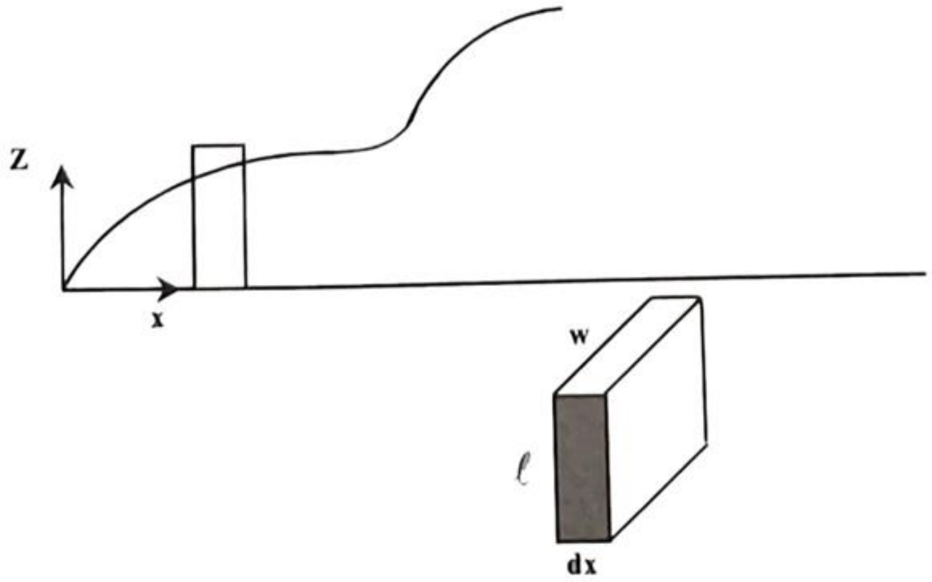
بنابراین:

$$\frac{C_A - C_{Ai}}{C_{A_0} - C_{Ai}} = \frac{3}{2}\left(\frac{Z}{\delta_c}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{Z}{\delta_c}\right)^3$$

$$\left.\frac{\partial C_A}{\partial Z}\right|_{Z=0} = \left(C_{A_0} - C_{A_i}\right)\frac{3}{2\delta_c} - \left.\frac{1}{2\delta_c^3} \times 3Z^2\right|_{Z=0} = -\frac{k_X}{D_{AB}}\left(C_{A_i} - C_{A_0}\right)$$

$$k_X = \frac{3D_{AB}}{2\delta_c}$$

بنابراین باید به گونه‌ای ضخامت لایهٔ غلظت، δ_c بدست آید. با بیلان جرم روی کنترل حجمی مطابق شکل



xجرم ورودی در جهت $= \rho w \int_0^{\ell} UdZ$

xجرم خروجی در جهت $= \rho w \int_0^{\ell} udZ + \left[\frac{d}{dx}\left(\rho w \int_0^{\ell} udZ\right)\right] dx$

(پائین)جرم ورودی از سطح $= CMV_0 w dx = \rho w V_0 dx$

جرم ورودی از بالای المان حجمی $= CMV_1 w dx = \rho w V_1 dx$

شرایط یکنواخت:

$$\text{جرم خروجی} = \text{جرم ورودی}$$

$$\rho w V_0 dx + \rho w V_1 dx + \rho w \int_0^{\ell} u dZ = \rho w \int_0^{\ell} u dZ + \frac{d}{dx}\left(\rho w \int_0^{\ell} u dZ\right) dx$$

$$V_1 = \frac{d}{dx}\left(\int_0^{\ell} u dZ\right) - V_0$$

با استفاده از معادلهٔ پیوستگی نیز می‌توان به رابطهٔ فوق رسید:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_Z}{\partial Z} = 0$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_Z}{\partial Z} = 0$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

$$\int_{V_0}^{V_1} du_z = -\int_0^{\ell} \frac{\partial u_x}{\partial x} dZ$$

$$-V_1 - V_0 = -\int_0^{\ell} \frac{\partial u_x}{\partial x} dZ \qquad \therefore \qquad V_1 = \int_0^{\ell} \frac{\partial u_x}{\partial x} dZ - V_0$$

بیلان برای جزء A:

$$x \text{ جرم ورودی } A \text{ در جهت } = \rho_A w \int_0^{\ell} u dZ$$

$$x \text{ جرم خروجی } A \text{ در جهت } = \rho_A w \int_0^{\ell} u dZ + \left[\frac{d}{dx}\left(\rho_A w \int_0^{\ell} u dZ\right)\right] dx$$

$$\text{جرم ورودی } A \text{ از پایین} = M_A w dx_A\, n_{AZ}\Big|_{Z=0} = M_A w dx_A \left(J_{AZ}\Big|_{Z=0} + C_{Ai} V_0\right)$$

$$= wdx\left(-\mathrm{D_{AB}} \frac{\partial \rho_\mathrm{A}}{\partial \mathrm{Z}}\bigg|_{\mathrm{Z=0}} + \rho_{\mathrm{Ai}} V_0\right)$$

$$\text{جرم ورودی } A \text{ از بالا} = \rho_{\mathrm{A_0}} \mathrm{wdx} V_1$$

بنابراین:

$$\frac{d}{\mathrm{dx}}\left(\rho_A w \int_0^{\ell} u dZ\right) dx = w dx \left(-\mathrm{D_{AB}} \frac{\partial \rho_\mathrm{A}}{\partial \mathrm{Z}}\bigg|_{\mathrm{Z}=0} + \rho_{\mathrm{Ai}} V_0\right) + \rho_{\mathrm{A_0}} \mathrm{w} V_1 dx$$

جایگزینی مقدار V_1:

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \int_0^{\ell} u dZ - V_0$$

$$\mathrm{D_{AB}} \frac{\partial \rho_\mathrm{A}}{\partial \mathrm{Z}}\bigg|_{\mathrm{Z}=0} + V_0(\rho_{\mathrm{A_0}} - \rho_{\mathrm{A_i}}) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \int_0^{\delta_\mathrm{c}} (\rho_{\mathrm{A_0}} - \rho_\mathrm{A}) U dZ$$

توجه: $\delta_\mathrm{c} \le Z \le \ell \quad , \quad \rho_{\mathrm{A_0}} - \rho_\mathrm{A} = 0$

با توجه به پروفایل سرعت و غلظت

$$u = a + bZ + cZ^2 + dZ^3$$

$$Z = 0 \qquad u = 0$$

$$Z = \delta \qquad u = \mathrm{u_0}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{Z}}\bigg|_{\mathrm{Z}=\delta} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \mathrm{Z}^2}\bigg|_{\mathrm{Z}=0} = 0$$

اعمال شرایط فوق:

$$\frac{u}{u_0} = \frac{3}{2}\left(\frac{Z}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{Z}{\delta}\right)^3$$

با توجه به پروفایل غلظت:

$$\frac{\rho_A - \rho_{Ai}}{\rho_{A_0} - \rho_{Ai}} = \frac{3}{2}\left(\frac{Z}{\delta_c}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{Z}{\delta_c}\right)^3$$

جایگذاری در رابطهٔ فوق:

$$\frac{10u}{u_0} = \phi^3 \delta \frac{d\delta}{dx} + 2\delta^2 \phi^2 \frac{d\phi}{dx} \quad , \quad \phi = \frac{\delta_c}{\delta}$$

اعمال شرایط فوق:

$$\frac{u}{u_0} = \frac{3}{2}\left(\frac{Z}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{Z}{\delta}\right)^3$$

با توجه به پروفایل غلظت:

$$\frac{\rho_A - \rho_{Ai}}{\rho_{A_0} - \rho_{Ai}} = \frac{3}{2}\left(\frac{Z}{\delta_c}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{Z}{\delta_c}\right)^3$$

جایگذاری در رابطهٔ فوق:

$$\frac{10u}{u_0} = \phi^3 \delta \frac{d\delta}{dx} + 2\delta^2 \phi^2 \frac{d\phi}{dx} \qquad , \qquad \phi = \frac{\delta_c}{\delta}$$

توجه: از V_0 صرف‌نظر شده است (صرف‌نظر از حرکت توده‌ای (کنوکسیون طبیعی) در مقابل نفوذ ملکولی).

از مکانیک سیالات:

$$\frac{\delta}{x} = 4.64 Re^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d\delta}{dx} = 4.64\left(\frac{\mu}{\rho u_0}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = 2.32\mathrm{Re}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\delta^2 = 21.53\left(\frac{\mu}{\rho u_0}\right)x$$

$$\phi^3 + \frac{4}{3}x\frac{d\phi^3}{dx} = \frac{0.929}{Sc}$$

$$\phi^3 = \frac{0.929}{Sc} + Cx^{-\frac{3}{4}}$$

شروع انتقال جرم از $x = x_0$ $\phi = 0$, $\delta_c = 0$, $x = x_0$

$$\phi = \frac{\delta_c}{\delta} = \left\{\frac{0.929}{Sc}\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right]\right\}^{\frac{1}{3}}$$

با جایگذاری مقدار δ:

$$\frac{\delta_c}{x} = 4.64\mathrm{Re}^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{0.929}{Sc}\left[1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right]\right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$Sh_x = \frac{k_x x}{D} = \frac{3}{4}\frac{D}{\delta_c}\frac{x}{D} = \frac{3}{2}\frac{x}{\delta_c}$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{1}{4.64\mathrm{Re}^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{0.929}{Sc}\left[1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right]\right\}^{\frac{1}{3}}}\right]$$

$$= 0.323\mathrm{Re}^{\frac{1}{2}}\mathrm{Sc}^{\frac{1}{3}}\left[1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{-\frac{1}{3}}$$

اگر انتقال جرم از نقطهٔ $x_0 = 0$ (لبهٔ سطح) شروع شود،

$$\frac{\delta_c}{\delta} = 0.976(\mathrm{Sc})^{-\frac{1}{3}} \approx \mathrm{Sc}^{-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\delta_c}{x} = 4.64(\mathrm{Re})^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{Sc})^{-\frac{1}{3}}$$

$$Sh_x = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{4.64\mathrm{Re}^{-\frac{1}{2}}Sc^{-\frac{1}{3}}}\right] = 0.323\mathrm{Re}^{\frac{1}{2}}Sc^{\frac{1}{3}}$$

$$\overline{Sh}_{av} = \frac{\bar{k}_{av}L}{D_{AB}} \quad , \quad \bar{k}_{av} = \frac{\int_0^L k_x dx}{\int_0^L dx}$$

$$k_x = \frac{3}{2}\frac{D_{AB}}{\delta_c} = \frac{2D_{AB}}{2 \times 4.64x\mathrm{Re}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{Sc}^{-\frac{1}{3}}}$$

$$\overline{Sh}_{av} = 0.646 Re_L^{\frac{1}{2}} \mathrm{Sc}^{\frac{1}{3}}$$

بنابراین:

$$\overline{Sh}_{av} = 2Sh_{\mathrm{x=L}}$$

رابطهٔ فوق به صورت تجربی تا حد $Re_\ell = \frac{\rho U \ell}{\mu}$ برابر با ۸۰۰۰۰ مورد تأیید قرار گرفته است؛ که حاکی از صحت فرضیات صورت گرفته در روش تقریبی (VonKarman) می‌باشد.

انتقال جرم در لایه مرزی جریا متلاطم روی سطح افقی

قانون توان یک هفتم پراندل بیانگر تغییرات سیال در لایهٔ مرزی متلاطم به شرح زیر می‌باشد.

$$\frac{u}{\mathrm{u}_\infty} = \left(\frac{\mathrm{Z}}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}$$

براساس تشابه بین لایۀ مرزی غلظت و ممنتوم در بخش آرام می‌توان تصور نمود که رفتاری مشابه رفتار فوق در لایه مرزی غلظت در بخش متلاطم نیز وجود خواهد داشت یعنی:

$$\frac{\rho_A-\rho_{Ai}}{\rho_{A_0}-\rho_{Ai}}=\frac{\rho'_A}{\rho'_{A_0}}\left(\frac{Z}{\delta_c}\right)^{\frac{1}{7}}$$

روش تقریبی Von Karman برای لایۀ مرزی تلاطم و با سرعت $V_0 = 0$ نوشته می‌شود.

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta_c}(\rho'_{A_0}-\rho'_A)udZ = D\left.\frac{\partial\rho'_A}{\partial Z}\right|_{Z=0} = k_\rho\rho'_{A_0}$$

با توجه به کار تجربی Eckert and Drake

$$\delta = 0.376xRe_x^{-0.2}$$

این رابطۀ تا حد $\frac{\rho U_\infty x}{\mu} < 10^7$ قابل قبول است. حال مهمترین فرض صورت گرفته این است که $\delta|_x = \delta_c|_x$، که این مورد در عدد اشمیت برابر ۱ صحیح به نظر می‌رسد (بنابراین به نظر می‌رسد رابطه برای گازها صحیح‌تر باشد).

$$k_\rho = u_\infty \frac{d}{dx}\left\{\delta \int_0^1 \left[1 - \left(\frac{Z}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}\right]\left(\frac{Z}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} d\left(\frac{Z}{\delta}\right)\right\}$$

$$k_\rho = \frac{7u_\infty}{72}\frac{d\delta}{dx}$$

که $\frac{d\delta}{dx}$ قابل دستیابی است، لذا:

$$Sh_x = \frac{k_\rho x}{D} = 0.0292Re_x^{0.8}$$

$$\overline{Sh}_{aV} = \frac{\bar{k}_\rho L}{D} = 0.0365Re_{x=L}^{0.8}$$