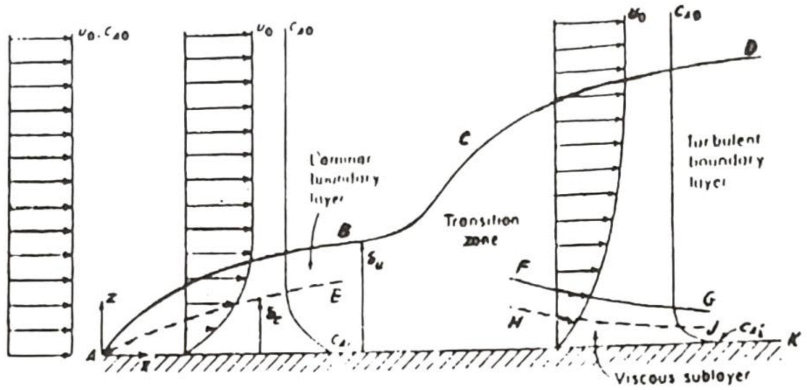
انتقال جرم به سیال در حال حرکت روی سطح افقی در جریان آرام

همانطور که می‌دانیم با حرکت سیال روی سطح جامد، لایۀ مرزی ممنتوم مطابق شکل زیر ایجاد خواهد شد. لایۀ مرزی ممنتوم ABCD حد فاصل بین سرعت U_0 و سرعت کمتر از U_0 می‌باشد. در صورتیکه انتقال جرم از سطح جامد به سیال صورت گیرد چنین لایۀ مرزی برای غلظت نیز دیده می‌شد، که حدفاصل غلظت C_{A_0} و کمتر از آن خواهد بود. در ابتدای لایۀ مرزی، جریان کاملاً آرام است (منحنی AB در انتقال ممنتوم و منحنی AE در انتقال جرم). سپس به منطقۀ انتقالی و از آنجا به منطقۀ متلاطم خواهیم رسید. عدد رینولدز در این منطقه در حدی است که جریان کاملاً متلاطم است. در این منطقه لایه ویسکوز، جریانی کاملاً آرام دارد (منحنی FG در انتقال ممنتوم و HJ در انتقال جرم). اگر از اثر انتقال جرم در جهت Z بر پروفایل سرعت صرف نظر نشود، مسئله کمی مشکل‌تر می‌شود؛ لیکن با صرف نظر از اثر انتقال جرم در پروفایل سرعت و بررسی همزمان انتقال ممنتوم و انتقال جرم (که از لبۀ سطح صورت می‌گیرد) به حل همزمان معادلات ممنتوم، حرارت و جرم به پروفایل غلظت، حرارت و ممنتوم در لایه آرام خواهیم رسید.



شکل 6-6 لایه‌های مرزی روی صفحه افقی جامد

حل دقیق:

با استفاده از معادلات کلی پیوستگی و با توجه به آنکه از هرگونه تغییرات غلظت در جهت y صرف‌نظر شده است، واکنش شیمیایی نداشته و حالت یکنواخت بررسی می‌شود. لذا:

$$U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_Z \frac{\partial U_Z}{\partial Z} = v \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial Z^2} \right) \tag{6-88}$$

$$U_x \frac{\partial T}{\partial x} + U_Z \frac{\partial T}{\partial Z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} \right) \tag{6-89}$$

$$U_x \frac{\partial C_A}{\partial x} + U_Z \frac{\partial C_A}{\partial Z} = D_{AB} \left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial Z^2} \right) \tag{6-90}$$

با تغییر متغیرهای زیر و اعمال شرایط مرزی در روابط فوق و با صرف‌نظر از نفوذ در جهت حرکت سیال می‌توان نوشت:

تغییر متغیرها:

$$U' = \frac{U_x - U_x|_{Z=0}}{U_0 - U_x|_{Z=0}} \quad , \quad C'_A = \frac{C_A - C_{Ai}}{C_{A_0} - C_{Ai}} \quad , \quad T' = \frac{T - T_i}{T_0 - T_i}$$

که C_{Ai}، T_i غلظت و دما در $Z = 0$ هستند.

شرایط مرزی:

$$Z = 0 \quad U_x|_{Z=0} = 0 \quad , \quad C_A = C_{Ai} \quad , \quad T = T_i \quad , \quad U' = C'_A = T' = 0$$

$$Z = \infty \quad U_x|_{Z=\infty} = U_0 \quad , \quad C_A = C_{A_0} \quad , \quad T = T_0 \quad , \quad U' = C'_A = T' = 1$$

$$x = 0 \quad U_x|_{Z=Z} = U_0 \quad , \quad C_A = C_{A_0} \quad , \quad T = T_0 \quad , \quad U' = C'_A = T' = 1$$

صرف‌نظر از نفوذ در جهت حرکت سیال:

$$U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_Z \frac{\partial U_Z}{\partial Z} = v \frac{\partial^2 U_x}{\partial Z^2} \tag{6-91}$$

$$U_x \frac{\partial T}{\partial x} + U_Z \frac{\partial T}{\partial Z} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} \tag{6-92}$$

$$U_x \frac{\partial C_A}{\partial x} + U_Z \frac{\partial C_A}{\partial Z} = D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial Z^2} \tag{6-93}$$

ملاحظه می‌شود حل معادلات لایه مرزی، با شرایط مرزی یکسان و در صورت تساوی $v = \alpha = D_{AB}$ (که در این صورت $Sc = \frac{v}{D}$ و $Pr = \frac{\gamma}{\alpha}$ و $Pr = Sc = 1$ خواهد شد) و استفاده از روابط پیوستگی به روابط نهایی یکسانی ختم خواهد شد.

$$Nu_x = \text{عدد ناسلت موضعی} = \frac{h_x x}{k} = 0.332\, Re_x^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}} \tag{6-94}$$

$$\overline{Nu}_{av} = \frac{\bar{h} L}{k} = 0.664\, Re_L^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}} \tag{6-95}$$

و نیز در انتقال جرم

$$Sh_x = \frac{f_x x}{\mathrm{CD_{AB}}} = 0.332\, Re_x^{\frac{1}{2}} Sc^{\frac{1}{3}} \qquad (6\text{-}96)$$

$$\overline{Sh}_{av} = \frac{\bar{F} L}{\mathrm{CD_{AB}}} = 0.664\, Re_L^{\frac{1}{2}} Sc^{\frac{1}{3}} \qquad (6\text{-}97)$$

رابطهٔ انتقال جرم فوق برای مقدار انتقال جرم کم و $Re < 80000$ وقتی انتقال جرم از لبهٔ سطح شروع می‌شود، مورد بررسی قرار گرفته و قابل استفاده خواهد بود. روابط فوق برای دستیابی به ضرایب انتقال حرارت و جرم در لایهٔ مرزی آرام بدست آمده است. لیکن روابط تجربی دیگری برای منطقهٔ متلاطم بدست آمده است که در بخش استفاده از روابط تجربی ارائه خواهد شد.

روش تقریبی (Von Karman)

روش دیگری در این رابطه برای حل مسئله و دستیابی به رابطه‌ای برای انتقال جرم در لایهٔ مرزی آرام ارائه شده است. در این روش با استفاده از بیلان کلی و بیلان جزئی (برای جزء A) و دستیابی به پروفایل سرعت و غلظت در لایهٔ مرزی به رابطهٔ ضریب انتقال جرم موضعی خواهیم رسید و سپس ضریب انتقال جرم متوسط و مقدار انتقال جرم موضعی یا کلی قابل دستیابی است.

ضریب انتقال جرم موضعی

با استفاده از معادلات سرعت:

$$N_{\mathrm{A_0}} = k_X\left(\mathrm{C_{Ai}} - \mathrm{C_{A_0}}\right) = -\mathrm{D_{AB}} \left.\frac{\partial \mathrm{C_A}}{\partial \mathrm{Z}}\right|_{z=0}$$

اگر پروفایل غلظت در هر نقطه‌ای مانند x در لایهٔ مرزی به صورت زیر فرض شود:

$$\mathrm{C_A} - \mathrm{C_{Ai}} = \mathrm{a} + \mathrm{bz} + \mathrm{cz}^2 + \mathrm{dz}^3 \qquad (6\text{-}98)$$

و نیز:

$$Z = 0 \qquad \mathrm{C_A} = \mathrm{C_{Ai}} \qquad \therefore \qquad \mathrm{a} = 0$$

$$Z = \delta_c \qquad \mathrm{C_A} = \mathrm{C_{A_0}} \qquad \therefore \qquad \mathrm{C_{A_0}} - \mathrm{C_{Ai}} = b\delta_c + c\delta_c^2 + d\delta_c^3$$

$$Z = \delta_c \qquad \frac{\partial \mathrm{C_A}}{\partial \mathrm{Z}} = 0 \qquad \therefore \qquad \mathrm{b} + 2\mathrm{c}\delta_c + 3d\delta_c^2 = 0$$

(عدم وجود نیروی محرکه)

$$Z=0 \qquad \frac{\partial^2 C_A}{\partial Z^2}=0 \qquad \therefore \qquad C=0$$

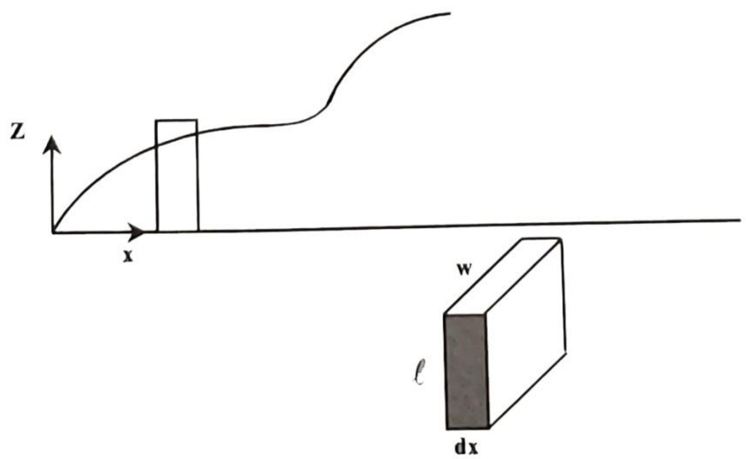
بنابراین: (با توجه به رابطهٔ 6-93)

$$\frac{C_A-C_{Ai}}{C_{A_0}-C_{Ai}}=\frac{3}{2}\left(\frac{Z}{\delta_c}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{Z}{\delta_c}\right)^3 \qquad (6\text{-}99)$$

$$\left.\frac{\partial C_A}{\partial Z}\right|_{Z=0}=\left(C_{A_0}-C_{A_i}\right)\frac{3}{2\delta_c}-\frac{1}{2\delta_c^3}\times 3Z^2\bigg|_{Z=0}=-\frac{k_X}{D_{AB}}\left(C_{A_i}-C_{A_0}\right)$$

$$k_X=\frac{3D_{AB}}{2\delta_c} \qquad (6\text{-}100)$$

بنابراین باید به گونه‌ای ضخامت لایهٔ غلظت، δ_c بدست آید. با بیلان جرم روی کنترل حجمی مطابق شکل،



جرم ورودی در جهتx $=\rho w\int_0^{\ell} U dZ$

جرم خروجی در جهتx $=\rho w\int_0^{\ell} U dZ+\left[\frac{d}{dx}\left(\rho w\int_0^{\ell} U dZ\right)\right]dx$

جرم ورودی از سطح (پائین) $=CMV_0 w dx=\rho w V_0 dx$

جرم ورودی از بالای المان حجمی $=CMV_1 w dx=\rho w V_1 dx$

شرایط یکنواخت:

جرم خروجی = جرم ورودی

$$\rho w V_0 dx + \rho w V_1 dx + \rho w \int_0^{\ell} U dZ = \rho w \int_0^{\ell} U dZ + \frac{d}{dx}\left(\rho w \int_0^{\ell} U dZ\right) dx$$

$$V_1 = \frac{d}{dx}\left(\int_0^{\ell} U dZ\right) - V_0$$

با استفاده از معادلهٔ پیوستگی نیز می‌توان به رابطهٔ فوق رسید:

$$\frac{\partial U_{\mathrm{x}}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial U_{\mathrm{y}}}{\partial \mathrm{Z}} = \frac{\partial U_{\mathrm{Z}}}{\partial \mathrm{Z}} = 0$$

$$\frac{\partial U_{\mathrm{x}}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial U_{\mathrm{Z}}}{\partial \mathrm{Z}} = 0$$

$$\frac{\partial U_{\mathrm{y}}}{\partial \mathrm{y}} = 0$$

$$\int_{V_0}^{V_1} dU_z = -\int_0^{\ell} \frac{\partial U_{\mathrm{x}}}{\partial \mathrm{x}} dZ$$

$$-V_1 - V_0 = -\int_0^{\ell} \frac{\partial U_{\mathrm{x}}}{\partial \mathrm{x}} dZ \qquad \therefore \qquad V_1 = \int_0^{\ell} \frac{\partial U_{\mathrm{x}}}{\partial \mathrm{x}} dZ - V_0$$

بیلان برای جزء A:

$$x \text{ در جهت } A \text{ جرم ورودی} = \rho_A w \int_0^{\ell} U dZ$$

$$x \text{ در جهت } A \text{ جرم خروجی} = \rho_A w \int_0^{\ell} U dZ + \left[\frac{d}{dx}\left(\rho_A w \int_0^{\ell} U dZ\right)\right] dx$$

$$\text{از پایین } A \text{ جرم ورودی} = M_A w dx_A n_{AZ}|_{Z=0} = M_A w dx_A (J_{AZ}|_{Z=0} + C_{Ai} V_0)$$

$$= w dx \left(-\mathrm{D_{AB}} \frac{\partial \rho_{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{Z}}\bigg|_{\mathrm{Z=0}} + \rho_{\mathrm{Ai}} V_0\right)$$

$$\text{از بالا } A \text{ جرم ورودی} = \rho_{\mathrm{A_0}} \mathrm{wdx} V_1$$

بنابراین:

$$\frac{d}{\mathrm{dx}}\left(\rho_A w \int_0^{\ell} U dZ\right) dx = w dx \left(-\mathrm{D_{AB}} \frac{\partial \rho_{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{Z}}\bigg|_{\mathrm{Z=0}} + \rho_{\mathrm{Ai}} V_0\right) + \rho_{\mathrm{A_0}} \mathrm{w} V_1 dx$$

جایگزینی مقدار V_1: $V_1 = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \int_0^{\ell} U dZ - V_0$

$$D_{AB}\frac{\partial\rho_A}{\partial Z}\bigg|_{Z=0}+V_0(\rho_{A_0}-\rho_{A_i})=\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta_c}(\rho_{A_0}-\rho_A)U\,dZ \qquad (6\text{-}101)$$

توجه: $\rho_{A_0}-\rho_A=0 \qquad , \qquad \delta_c\le Z\le \ell$

با توجه به پروفایل سرعت و غلظت:

$$U=a+bZ+cZ^2+dZ^3$$

$$Z=0 \qquad U=0$$

$$Z=\delta \qquad U=U_0$$

$$\frac{\partial U}{\partial Z}\bigg|_{Z=\delta}=0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2}\bigg|_{Z=0}=0$$

اعمال شرایط فوق:

$$\frac{U}{U_0}=\frac{3}{2}\left(\frac{Z}{\delta}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{Z}{\delta}\right)^3$$

با توجه به پروفایل غلظت:

$$\frac{\rho_A-\rho_{Ai}}{\rho_{A_0}-\rho_{Ai}}=\frac{3}{2}\left(\frac{Z}{\delta_c}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{Z}{\delta_c}\right)^3 \qquad (6\text{-}102)$$

جایگذاری در رابطهٔ فوق:

$$\frac{10U}{U_0}=\phi^3\delta\frac{d\delta}{dx}+2\delta^2\phi^2\frac{d\phi}{dx} \qquad , \qquad \phi=\frac{\delta_c}{\delta}$$

توجه: از V_0 صرف‌نظر شده است (صرف‌نظر از حرکت توده‌ای (کنوکسیون طبیعی) در مقابل نفوذ ملکولی).

از مکانیک سیالات: $\frac{\delta}{x}=4.64Re^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{d\delta}{dx}=4.64\left(\frac{\mu}{\rho U_0}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)=2.32Re^{-\frac{1}{2}}$$

$$\delta^2=21.53\left(\frac{\mu}{\rho U_0}\right)x$$

$$\phi^3+\frac{4}{3}x\frac{d\phi^3}{dx}=\frac{0.929}{Sc}$$

$$\phi^3 = \frac{0.929}{Sc} + Cx^{-\frac{3}{4}}$$

شروع انتقال جرم از $x = x_0$ $\phi = 0$, $\delta_c = 0$, $x = x_0$

$$\phi = \frac{\delta_c}{\delta} = \left\{\frac{0.929}{Sc}\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right]\right\}^{\frac{1}{3}}$$

با جایگذاری مقدار δ:

$$\frac{\delta_c}{x} = 4.64\mathrm{Re}^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{0.929}{Sc}\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right]\right\}^{\frac{1}{3}} \tag{6-103}$$

$$Sh_x = \frac{k_x x}{D} = \frac{3}{4}\frac{D}{\delta_c}\frac{x}{D} = \frac{3}{2}\frac{x}{\delta_c} \tag{6-104}$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{1}{4.64\mathrm{Re}^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{0.929}{Sc}\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right]\right\}^{\frac{1}{3}}}\right]$$

$$= 0.323\mathrm{Re}^{\frac{1}{2}}\mathrm{Sc}^{\frac{1}{3}}\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{-\frac{1}{3}} \tag{6-105}$$

اگر انتقال جرم از نقطهٔ $x_0 = 0$ (لبهٔ سطح) شروع شود،

$$\frac{\delta_c}{\delta} = 0.976(\mathrm{Sc})^{-\frac{1}{3}} \approx \mathrm{Sc}^{-\frac{1}{3}} \tag{6-106}$$

$$\frac{\delta_c}{x} = 4.64(\mathrm{Re})^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{Sc})^{-\frac{1}{3}} \tag{6-107}$$

$$Sh_x = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{4.64\mathrm{Re}^{-\frac{1}{2}}Sc^{-\frac{1}{3}}}\right] \tag{6-108}$$

$$= 0.323\mathrm{Re}^{\frac{1}{2}}Sc^{\frac{1}{3}} \tag{6-109}$$

$$\overline{Sh}_{av} = \frac{\bar{k}_{av}L}{D_{AB}} \quad , \quad \bar{k}_{av} = \frac{\int_0^L k_x dx}{\int_0^L dx}$$

$$k_x = \frac{3}{2}\frac{D_{AB}}{\delta_c} = \frac{2D_{AB}}{2 \times 4.64x\mathrm{Re}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{Sc}^{-\frac{1}{3}}}$$

$$\overline{Sh}_{av} = 0.646Re_L^{\frac{1}{2}}\mathrm{Sc}^{\frac{1}{3}} \quad (6\text{-}110)$$

بنابراین:

$$\overline{Sh}_{av} = 2Sh_{\mathrm{x=L}} \quad (6\text{-}111)$$

رابطهٔ فوق به صورت تجربی تا حد $Re_\ell = \frac{\rho U \ell}{\mu}$ برابر با 80000 مورد تأیید قرار گرفته است؛ که حاکی از صحت فرضیات صورت گرفته در روش تقریبی (VonKarman) می‌باشد.

انتقال جرم در لایه مرزی جریا متلاطم روی سطح افقی

قانون توان یک هفتم پراندل بیانگر تغییرات سیال در لایهٔ مرزی متلاطم به شرح زیر می‌باشد.

$$\frac{U}{U_\infty} = \left(\frac{Z}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \quad (6\text{-}112)$$

براساس تشابه بین لایهٔ مرزی غلظت و ممنتوم در بخش آرام می‌توان تصور نمود که رفتاری مشابه رفتار فوق در لایه مرزی غلظت در بخش متلاطم نیز وجود خواهد داشت یعنی:

$$\frac{\rho_A - \rho_{Ai}}{\rho_{A_0} - \rho_{Ai}} = \frac{\rho'_A}{\rho'_{A_0}}\left(\frac{Z}{\delta_c}\right)^{\frac{1}{7}} \quad (6\text{-}113)$$

روش تقریبی Von Karman برای لایهٔ مرزی تلاطم و با سرعت $V_0 = 0$ نوشته می‌شود (رابطهٔ 6-101).

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta_c}\left(\rho'_{A_0} - \rho'_A\right)U\mathrm{d}Z = D\left.\frac{\partial \rho'_A}{\partial Z}\right|_{Z=0} = k_\rho \rho'_{A_0} \quad (6\text{-}114)$$

با توجه به کار تجربی Eckert and Drake

$$\delta = 0.376xRe_x^{-0.2} \quad (6\text{-}115)$$

این رابطهٔ تا حد $\frac{\rho U_\infty x}{\mu} < 10^7$ قابل قبول است. حال مهمترین فرض صورت گرفته این است که $\delta|_x = \delta_c|_x$، که این مورد در عدد اشمیت برابر 1 صحیح به نظر می‌رسد (بنابراین به نظر می‌رسد رابطه برای گازها صحیح‌تر باشد). تلفیق روابط (6-112) الی (6-114) نشان می‌دهد که:

$$k_\rho = U_\infty \frac{d}{dx}\left\{\delta \int_0^1 \left[1 - \left(\frac{Z}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}\right]\left(\frac{Z}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \mathrm{d}\left(\frac{Z}{\delta}\right)\right\} \quad (6\text{-}116)$$

$$k_\rho = \frac{7U_\infty}{72}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{dx}} \quad (6\text{-}117)$$

که $\frac{d\delta}{dx}$ از رابطهٔ (6-115) قابل دستیابی است، لذا:

$$Sh_x = \frac{k_\rho x}{D} = 0.0292 Re_x^{0.8} \tag{6-118}$$

$$\overline{Sh}_{aV} = \frac{\bar{k}_\rho L}{D} = 0.0365 Re_{x=L}^{0.8} \tag{6-119}$$