مثال 3-1: یک استوانه میان تهی از جنس پلیمر نیمه تراوای بسیار نازک به شعاع 10 سانتی متر و طول یک متر مفروض است. با فرض اینکه در حین تبخیر آب از سطح خارجی استوانه در هوای خشک اطراف آن (در دمای 25/9 سلسیوس و فشار 1 آتمسفر) سطح مذکور همواره به طور پایا به صورت مرطوب باقی بماند مطلوب است محاسبه زمان مورد نیاز برای تبخیر 1 لیتر آب از سطح خارجی استوانه مذکور از دو روش سطح ثابت و سطح متغیر. ضخامت لایه انتقال جرم برابر 50 سانتی متر در نظر گرفته می‌شود.

حل: با توجه به اینکه جرم حجمی آب در دمای 25/9° C برابر $997\frac{kg}{m^3}$ می باشد، لذا تعداد مول آب تبخیر شده (در حجم یک لیتر) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$n_A = \frac{pv}{M_A} = \frac{997\times 0.001}{18} = 0.0554 kgmole = 55.4 gmole$$

نظر به اینکه تبخیر آب در هوای ساکن رخ می‌دهد لذا مقدار پارامتر α برابر 1 می گردد. اکنون از دوروش خواسته شده فوق میزان شار انتقال جرم محاسبه می‌شود.

$$\varphi_A = \frac{C_{Ai} - C_A}{C_{Ai} - C_{A0}}$$

$$\frac{pg\delta^2}{2.\mu}(1-\left(\frac{z}{\delta}\right)^2)\frac{\partial \varphi_A}{\partial y} = D_{AB}\frac{\partial^2 \varphi_A}{\partial Z^2}$$

$$\varphi_A(y=0, z) = 1 \qquad \varphi_A(y, z=0) = 0 \qquad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=\delta} = 0$$

برای حل معادله دیفرانسیل فوق، معمولا در حالت مجزا از یکدیگر و به صورت زیر در نظر گرفته می شوند که به اختصار در مورد آنها بحث می گردد.

الف) هنگامی که زمان تماس زیاد باشد.

ب) هنگامی که زمان تماس کم باشد.

الف) هنگامی که زمان تماس زیاد باشد: در این حالت می بایست ارتفاع دیواره (L) نسبتا زیاد باشد که این امر مغایر با فرض ثابت گرفتن ضخامت لایه مایع (δ) است. از سوی دیگر، چنانچه گرانروی سیال

نسبتا زیاد باشد، آنگاه حتی برای مقادیر نسبتا کوچک (L) نیز زمان تماس نسبتا زیاد خواهد بود که تضاد چندانی با فرضیه های انجام شده فوق ندارد. در این حالت، با استفاده از تکنیک «جداسازی متغیرها می‌توان نسبت به حل معادله دیفرانسیل فوق اقدام نمود.

(51-4)

$$\{\varphi_A = \Psi_A(y).\theta(Z)$$

پس از جای گذاری مقدار پارامتر φA در معادله (۴-۵۰) و با فرض نمودن $y = \frac{\rho g \delta^2}{2\mu . D_{AB}}$ نتیجه می شود:

(4-52)

$$\frac{\gamma}{\psi_A(y)} \frac{\partial \psi_A(y)}{\partial y} = \frac{1}{(1-(z/\delta)^2)\theta(z)} \frac{\partial^2 \theta(z)}{\partial Z^2} = -\lambda^2$$

که پارامتر λ هر مقدار ثابت دلخواه می باشد. بدیهی است برای به دست آوردن تابعیت متغیرهای وابسته Ψ و θ نسبت به متغیرهای مستقل y و می بایست معادله های دیفرانسیل زیر به صورت مجزا حل شوند:

(53-4)

$$\gamma \frac{\partial \psi_A}{\partial y} + \lambda^2 \psi_A = 0 \qquad (4-53)$$

$$\frac{\partial^2 \theta(z)}{\partial Z^2} - \lambda^2 (\frac{Z}{\delta})^2 \theta(Z) + \lambda^2 = 0 \qquad (4-54)$$

$$\frac{C_A - C_{Ai}}{C_{A0} - C_{Ai}} = 1.5\left(\frac{z}{\delta_C}\right) - 0.5\left(\frac{Z}{\delta_C}\right)^3 \qquad (4-85)$$

رابطه فوق تنها برای جریان آرام سیال بر روی صفحه افقی صادق است. بدیهی است تابعیت غلظت جزء مورد نظر نسبت به متغیر مستقل X در پارامتر δc مستتر باشد که برای حالت جریان آرام (در صورتی که انتقال جرم و مومنتوم از یک نقطه شروع شوند) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\delta}{\delta_c} = sc^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{\delta_c}{x} = \frac{4.64}{\mathrm{Re}_x^{0.5}\, Sc^{1/3}} \qquad (4-86)$$

با فرض اینکه انتقال جرم در لایه مرزی آرام مورد نظر تنها از طریق نفوذ انجام گردد، آنگاه می‌توان ضریب انتقال جرم را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$N_A = K_c(C_{A0} - C_{Ai}) = +D_{AB}\frac{\partial C_A}{\partial Z}\bigg|_{z=0} \qquad (4\text{–}87)$$

پس از جای گذاری برای دو طرف معادله فوق نتیجه می‌شود:

$$k_c(C_{A0} - C_{Ai}) = (C_{A0} - C_{Ai}) \times \frac{1.5}{\delta_c} \times (-D_{AB}) \Rightarrow k_c = D_{AB} \times \frac{1.5}{\delta_c} \qquad (4\text{–}88)$$

با توجه به تعریف عدد بدون بعد شروود می‌توان نوشت:

$$sh = \frac{k_c x}{D_{AB}}, \Rightarrow SH = 0.323\,\mathrm{Re}^{1/2}\, Sc^{1/3} \qquad (4\text{–}89)$$

چنانچه محاسبه ضریب انتقال جرم متوسط در فاصله$L \le X \le O$ مد نظر باشد آنگاه می‌توان از رابطه زیر آن را محاسبه نمود:

$$\overline{K}_c = \frac{\int_0^L k_c dx}{\int_0^L dx} = \frac{shD_{AB}}{L} \qquad (4\text{–}90)$$

پس از جایگذاری تابعیت ضریب انتقال جرم نسبت به مولفهx در معادله فوق می‌توان مقدار شروود متوسط را برای طول L به صورت زیر محاسبه کرد:

$$sh = k_c \times \frac{L}{D_{AB}} = 0.646\,\mathrm{Re}^{1/2}\, Sc^{1/3} \qquad (4\text{–}91)$$

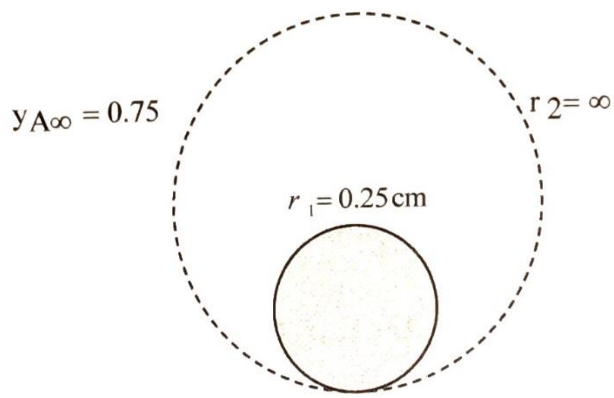
مثال 3-2: مطابق شکل زیر یک کاتالیزور کروی شکل به قطر 0/5 سانتی متر در معرض جریان آرامی از گازهای A,B قرار گرفته است. A از داخل گاز به سطح کاتالیزور نفوذ کرده و در آنجا مطابق واکنش

$3A \rightarrow 2B$ به سرعت تبدیل به B می‌گردد. با توجه به اطلاعات مندرج در شکل مطلوب است محاسبه سرعت از بین رفتن A (بر حسب mole/s) با توجه به فرضیات زیر:

الف) هیچ واکنشی در فاز گاز انجام نمی‌شود و فقط در سطح کاتالیزور A تبدیل به B می‌گردد.

ب) وضعیت سامانه به صورت پایا بوده و تغییرات غلظت تنها در جهت شعاعی وجود دارد.

ج) $P= 1atm \quad ; \quad T= 421K \quad ; \quad D_{AB}= 10^{-4} m^2/s$



حل: با توجه به اینکه استوکیومتری واکنش، ساز و کار انتقال جرم (α) از رابطه زیر تعیین می‌گردد:

$$\frac{N_A}{3} = -\frac{N_B}{2} \Rightarrow N_B = -\frac{2}{3} N_A \Rightarrow \alpha_A = \frac{N_A}{N_A + N_B} = \frac{N_A}{N_A - N_B} = \frac{N_A}{N_A - 2/3N_A} = 3$$

پس از جایگذاری از معادله (46-3) نتیجه می شود:

$$N_{A1} = \frac{3D_{AB}P_1}{RT \quad R_1^2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} In\left[\frac{3-y_{A2}}{3-y_{A1}}\right]$$

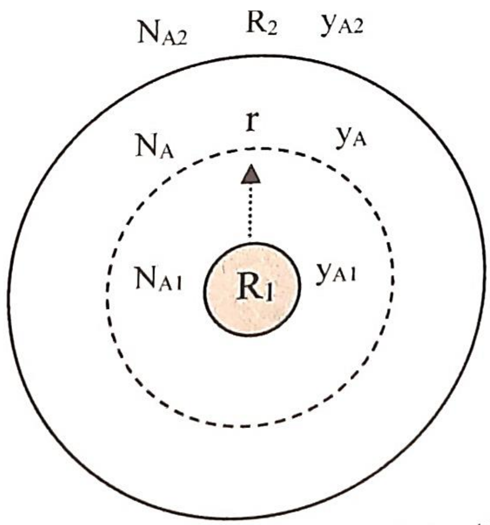
$$N_{A1} = \frac{3\times10^{-4} \times1}{82.06\times10^{-6}\times421\times(2.5\times10^{-3})^2(1/2.5\times10^{-3} - 1/\infty)} In\left[\frac{3-0.75}{3-0.0}\right] = -1.0\frac{gmole}{m^2.s}$$

$n_{A1}= N_{A1}\times A_1= 1\times(4\times\pi\times0.0025^2)= 7.85\times10^{-5}\frac{mole}{s}$

.

3- انتقال جرم در جهت شعاعی از یک کره ساکن-

مطابق شکل (۹-۳) چنانچه انتقال جرم از سطح کره به محیط اطراف و یا در جهت عکس صورت پذیرد، آنگاه -نمی توان میزان شار انتقال جرم را در مقاطع (شعاع های مختلف ثابت در نظر گرفت. در این حالت می توان موازنه جرم برای یک جزء مناسب در درون لایه انتقال جرم به صورت زیر نوشت:



شکل ۳-۹ انتقال جرم پایا در جهت شعاعی از یک کره.

معادله فوق برای وضعیت خاص نفوذ A در داخل B ساکن ($N_B=0$) به صورت زیر ساده می گردد:

$$N_A = \frac{D_{AB}P_1}{RT\ R_1^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_2}\right)} In\left[\frac{1-y_{A2}}{1-y_A}\right] \qquad (3\text{-}47)$$

مثال 3-5: یک کره توخالی از جنس پلیمر نیمه تراوای بسیار نازک به شعاع خارجی ۱۰ سانتی متر مفروض است. با فرض اینکه در حین تبخیر آب از سطح خارجی کره در هوای نامحدود اطراف آن ($R_2=\infty$)، سطح مذکور همواره به صورت پایا مرطوب باقی بماند، مطلوب است محاسبه زمان مورد نیاز برای تبخیر کامل آب درون کره از دو روش سطح ثابت و سطح متغیر.

فرضیات: دما و فشار هوای خشک اطراف کره به ترتیب برابر 25/9°C و 1 اتمسفر بوده و دمای کره نیز در تمام مدت تبخیر آب مانند دمای هوای اطراف آن (25/9°C) ثابت باقی می ماند. در ضمن ضریب نفوذ آب در هوا در شرایط مذکور برابر 0.258 S/cm^2 می باشد.

حل: با توجه به اینکه جرم حجمی آب در دمای $25/9°C$ برابر $997\ kg/m^3$ می باشد، لذا تعداد مول‌های اولیه آب درون کره به صورت زیر محاسبه می شود:

$$n_A = \frac{PV}{M_A} = \frac{997 \times ^{\pi(0.2)^3/6}}{18} = 0.232 kgmole = 232 gmole$$

نظر به اینکه شار انتقال جرم هوا برابر صفر می باشد، لذا مقدار پارامتر α برابر 1 می گردد. اکنون از دو روش خواسته شده فوق میزان شار انتقال جرم به صورت زیر محاسبه می شود:

الف) روش سطح ثابت: با توجه به اینکه مقدار ضخامت لایه انتقال جرم (z) در معادله (۳-۳) عملا برابر $R_2 - R_1$ بوده و تقریبا بی نهایت می باشد، لذا در صورت جای گذاری پارامتر مذکور در معادله (۳-۳)، مقدار شار انتقال جرم به دست آمده برابر صفر می گردد که کاملا غیر واقعی است. بدیهی است در این صورت، زمان مورد نیاز برای تبخیر آب موجود در کره به سمت بی نهایت میل می نماید.

ب) روش سطح متغیر:

$$y_A = P^{\times} \Big|25.9 \Big|P_1 = \frac{25}{760} = 0.033$$

$$N_A = \frac{2.58 \times 10^{-5} \times 1}{82.056 \times 10^{-6} \times 299 \times 0.1^2 (\frac{1}{0.1} - \frac{1}{\infty})} In \left[\frac{1-0}{1-0.033}\right] = 3.53 \times 10^{-4} \frac{gmole}{m^2.s}$$

$$t = \frac{n_A}{A_1 \times N_{A1}} = \frac{232}{4\pi \times (0.1)^2 \times 3.53 \times 10^{-4}} = 5.23 \times 10^6 S = 60.5 days$$

همان گونه که پیش از این ذکر گردید، تابعیت C_A نسبت به z به صورت یک سری نامحدود بوده و همین جهت از رابطه فوق نمی توان ضریب انتقال جرم را در هرفاصله عمودی مورد نظر (y) به دست آورد.

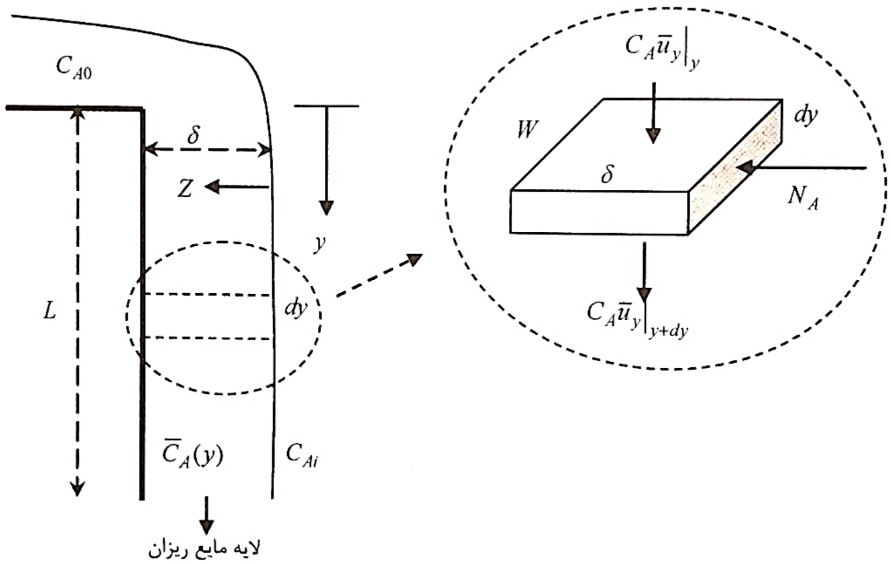
در حالت دوم، چنانچه مطابق شکل زیر یک جزء دیفرانسیلی در y به ضخامت dy برای فیلم مایع ریزان در نظر گرفته شود، آنگاه می توان موازنه جرم حول جزء مذکور را با توجه به فرضیه های انجام شده قبلی، به صورت زیر نوشت:

مصرف – تولید + خروجی – ورودی = تجمع

$$0=\overline{C}_{A(y)}\,\overline{u}_y\Big|(w.\delta)-\overline{C}_{A(y)}\,\overline{u}_y\Big|_{y+dy}(w\delta)+N_A.(dy.w)$$

پس از تقسیم دو طرف رابطه فوق بر (w (dy و با استفاده از تعاریف مشتق و ضریب انتقال جرم (با فرض آنکه انتقال جرم از فاز گاز به مایع باشد)، نتیجه می شود:

$$\frac{d\overline{C}_{A.y}}{dy}=\frac{1}{\delta\overline{u}_y}k_L(C_{A1}-\overline{C}_{A.y})\Rightarrow\int_{C\,A0}^{C\,AL}\frac{Dc_{A.y}}{C_{A1}-\hat{C}_{A.y}}=\int_0^L\frac{k_L}{\delta\overline{u}}dy$$



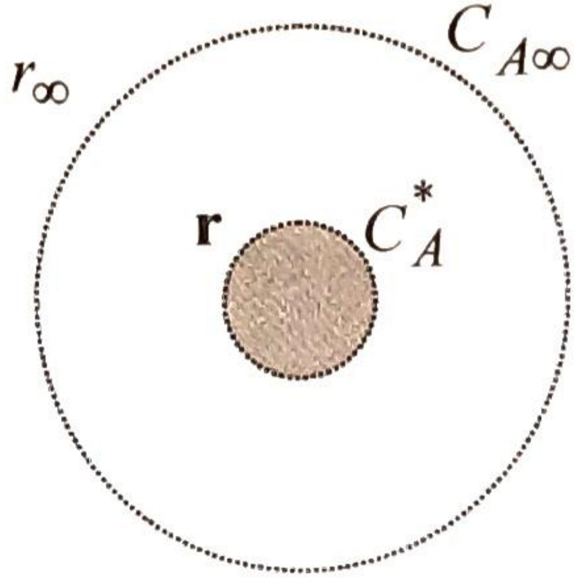
اکنون چنانچه به جای ضریب انتقال جرم نقطه ای (k_L) که تابع فاصله عمودی (y) می باشد، با توجه به تعریف زیر، از ضریب انتقال جرم متوسط استفاده گردد.

$$N_A=k_{L.cg}(C_{Ai}-\overline{C}_A)_{avg} \qquad (4\text{-}61)$$

$$(C_{Ai}-\overline{C}_A)_{avg}=\frac{(C_{Ai}-C_{A0})-(C_{AI}-\overline{C}_{AL})}{In(\dfrac{C_{AI}-C_{A0})}{C_{A1}-\overline{C}_{AL})}} \qquad (4\text{-}62)$$

مطابق شکل نمادین زیر، یک قطره آب به قطر اولیه R_1 مفروض می باشد که در هوای اطراف خود (با رطوبت مشخص $C_{A\infty}$) در دما و فشار ثابت تبخیر گردیده و با رطوبت هوا بر روی آن مایع می‌شود.

در هر دو حالت موازنه جرم حول حجم کنترلی قطره در هر لحظه به صورت زیر نوشته می شود:



خروجی - ورودی = انباشتگی

برای تبخیر

$$\frac{d(pV)}{dt} = 0 - N_A \times A \times M$$

برای میعان

$$\frac{d(pV)}{dt} = N_A \times A \times M - 0$$

با فرض وقوع پدیده تبخیر و غیرقابل متراکم بودن آب موجود در قطره (P=cte) معادله فوق به صورت زیر ساده می‌شود. بدیهی است می‌توان عینا از همین روش برای حالت میعان نیز استفاده نمود.

$$p \times 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = -N_A \times 4\pi r^2 \times M \qquad (3\text{-}68)$$

مطابق رابطه (3-47) برای نفوذ بخار آب در هوای ساکن اطراف یک قطره آب کروی شکل می‌توان نوشت:

$$N_A = \frac{D_{AB}P_1}{RT\ r^2(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_\infty})} = In\left[\frac{1-y_{A\infty}}{1-y_A^{\times}}\right] \qquad (3\text{–}69)$$

پس از جایگذاری مقدار شار انتقال جرم در معادله (3–68) و با فرض اینکه r≠0 باشد نتیجه می‌شود:

$$p\frac{dr}{dt} = \frac{D_{AB}P_1M}{RT} = In\left[\frac{1-y_{A\infty}}{1-y_A^{\times}}\right]\times\frac{R_\infty}{r(R_\infty - r)} \qquad (3\text{–}70)$$

به جای استفاده از معادله (4–78) که بسیار پیچیده است می‌توان از معادله زیر که با توجه به معادله پیوستگی، برای سیالات غیرقابل تراکم صادق است استفاده نمود.

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \qquad (4\text{–}79)$$

با توجه به فرضیات انجام شده فوق و با صرف نظر نمودن از انتقال مومنتوم ناشی از چسبندگی سیال در جهت x معادله مربوط به مولفه افقی به صورت زیر ساده می‌گردد:

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_z}{\partial z} = v\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) \qquad (4\text{–}80)$$

$U_x(x= ,z)= u_0$, $u_x(x,z=0)$, $\left.\frac{\partial u_x}{\partial_z}\right|_{z=\infty} = 0$

بدیهی است حل مجموعه معادله‌های دیفرانسیل پاره‌ای فوق بسیار پیچیده می باشد.

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.64}{\mathrm{Re}_x^{0.5}} \qquad (4\text{–}81)$$

اکنون با فرض آنکه تابعیت مولفه افقی سرعت (u_x) نسبت به x به صورت یک چند جمله‌ای درجه سوم فرض شود آنگاه با توجه به شرایط مرزی موجود می‌توان توزیع تقریبی مولفه مذکور را به صورت زیر به دست آورد.

$$u_x = a_0 + a_1\frac{z}{\partial} + a_2\left(\frac{z}{\delta}\right)^2 + a_3\left(\frac{z}{\delta}\right)^3 \qquad (4\text{–}82)$$

$u_x(ظ = 0\, x و) = 0،\ \left.\frac{\partial u_x}{\partial z}\right|_{z=\delta} = 0$, $u_x\ (z=\delta,x)= u_0$

با اعمال شرایط فوق بر چند جمله‌ای درجه سوم توزیع تقریبی سرعت به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{u_x}{u_0} = 1.5\left(\frac{z}{\delta}\right) - 0.5\left(\frac{z}{\delta}\right)^3 \qquad (3\text{-}84)$$

به طریق مشابه می‌توان فرض نمود که توزیع اختلاف غلظت جزء مورد نظر در داخل لایه مرزی به صورت یک چند جمله‌ای درجه سوم باشد. در این صورت با توجه به شرایط مرزی موجود که کاملا شبیه شرایط مرزی سرعت می‌باشد توزیع اختلاف غلظت دقیقا مشابه توزیع سرعت به دست می‌آید. با این تفاوت که ضخامت لایه مرزی جرم جایگزین ضخامت مرزی هیدرودینامیکی می‌شود.

$$C_A - C_{A1} = a_1 + b_1 z + c_1 z^2 + d z^3 \qquad (4\text{-}84)$$

$$C_A(z=0.\ X) = C_{Ai}\ , \qquad \left.\frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2}\right|_{z=0} = 0،\quad C_A(z=\delta، x) = C_{A0}،\left.\frac{\partial C_A}{\partial Z}\right|_{Z=\delta} = 0$$

سهولت به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$k_L = \sqrt{\frac{3\bar{u}_y D_{AB}}{2\pi\ y}} \qquad (4\text{-}69)$$

با توجه به تعاریف اعداد بدون بعد اشمیت، رینولدز و پکلت اکنون می‌توان نوشت:

$$\mathrm{Re} = \frac{4\, p u_y.\delta}{\mu}،\ p_e = \mathrm{Re}\, Sc = \frac{4\bar{u}_y \delta}{D_{AB}} \qquad k_L = \sqrt{\frac{3D_{AB}، Pe}{8\pi\ y \quad \delta}} \qquad (4\text{-}70)$$

در صورتی که محاسبه مقدار نقطه‌ای عدد بدون بعد شروود مورد نظر باشد، آنگاه می‌توان آن را از رابطه زیر به دست آورد:

$$sh = \frac{k_L.\delta}{D_{AB}} = \sqrt{\frac{3\delta، Pe}{8\pi\ y}} \qquad (4\text{-}71)$$

با معلوم بودن تابعیت ضریب انتقال جرم و عدد بدون بعد شروود نسبت به متغیر مستقل y می‌توان مقادیر متوسط هر یک از پارامترهای مورد نظر را (در حالتی که زمان تماس کوتاه باشد) به صورت زیر محاسبه نموده و با مقادیر به دست آمده در معادله‌های (4-64) و (4-65) (که برای حالت زمان تماس طولانی می‌باشند) مقایسه کرد.

$$\bar{k}_L = \frac{\int_0^K k_L dy}{\int_0^K dy} = \sqrt{\frac{3D_{AB}^2.\bar{P}e}{2\pi.\delta.L}} \qquad (4\text{–}72)$$

$$\bar{S}h = \frac{\bar{k}L.\delta}{D_{AB}} = \sqrt{\frac{3.\bar{P}e.\delta}{2\pi..L}} \qquad (4\text{–}73)$$

لازم به تذکر است که معادله‌های (4-64) و (4-65) برای هنگامی که عدد بدون رینولدز کوچکتر از 100 باشد صادق بوده، اما می‌توان از معادله‌های (4-72) و (4-73) برای اعداد رینولدز کمتر از 1200 (در صورتی که سطح مایع و گاز فاقد موج باشد) استفاده نمود. اکنون با مشخص بودن مقدار متوسط ضریب انتقال جرم، با استفاده از رابطه زیر به سهولت می‌توان مقدار شار انتقال جرم انجام شده در طول لایه مایع ریزان را به دست آورد.

$$\bar{N}_A = \bar{K}_L (C_{Ai} - \bar{C}_A)_{avg} = \frac{\bar{u}_y.\delta}{L}(C_{AL} - C_{A0}) \qquad (4\text{–}74)$$

مثال 4-6: چنانچه لایه مایع ریزان ذکر شده در مثال (4-5) با هوای آغشته به 10 درصد حجمی آمونیاک در تماس باشد مطلوب است محاسبه ضریب و شار متوسط انتقال جرم در صورتی که ارتفاع دیواره برابر 30 سانتی متر بوده و غلظت آمونیاک در آب ورودی حدود 1grmole/lit باشد. ضریب نفوذ آمونیاک در دمای $25°$ C و فشار 1 اتمسفر برابر $2\times10^{-9} m^2/s$ در نظر گرفته می شود.

خواهد بود. زیرا در مورد سامانه کروی می‌توان مقدار dz را برابر dr در نظر گرفت. در مورد سامانه مخروط ناقص می‌بایست از رابطه زیر استفاده شود.

$$\frac{dz}{dr} = -\tan\alpha = -\frac{h}{r_1 - r_2}$$

پس از جایگذاری از روابط فوق در معادله مربوط به شار انتقال جرم و ساده نمودن انتگرال به دست آمده نتیجه می‌شود:

$$N_A = \frac{D_{AB}P_1}{RT\quad h}\left(\frac{r_2}{r_1}\right) In\left(\frac{1-y_{A2}}{1-y_{A1}}\right)$$

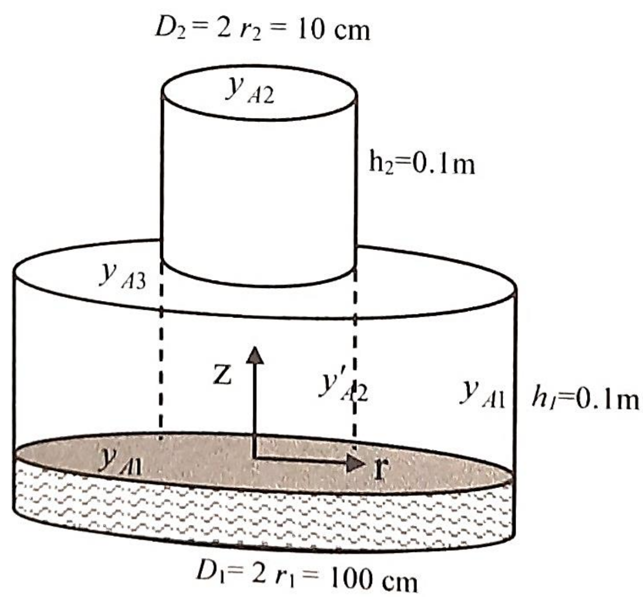
با توجه به خواص فیزیکی اخذ شده از مراجع (43 و 39) داریم:

$$P^{\times}_{H_2O}\Big|_{25°C} = 23.756\,mmHg \qquad D_{H_2O-Air}\Big|_{25°c} = 2.56\times10^{-5}\,\frac{m^2}{s}$$

$$N_A = \frac{2.56\times10^{-5}\times1}{82.056\times10^{-6}\times298\times0.1}\left(\frac{15.3}{50}\right)In\left(\frac{760-0.2\times23.756}{760-23.756}\right) = 8.164\times10^{-5}\,\frac{gmole}{m^2 s}$$

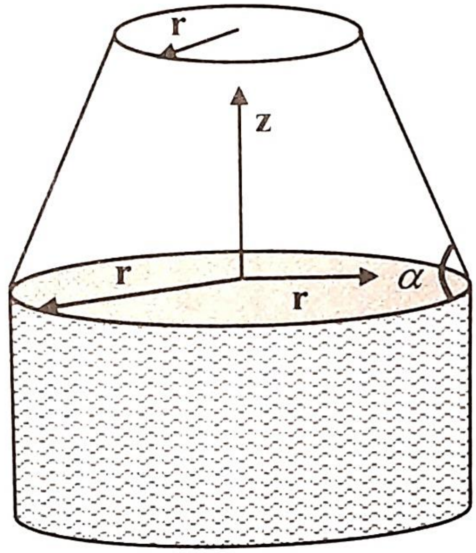
جرم کل آب تبخیر شده $= 8.164\times10^{-5}\times\pi\times(0.25)^2\times3600\times18.02=1.039\ \text{gr}$

اگرچه در مثالهای نسبتا ساده فوق می‌توان با استفاده از یک رابطه کمکی، سامانه چند بعدی را به صورت یک سامانه بعدی مجازی در نظر گرفت و میان شار انتقال جرم را برای آن در هر حالت به صورت دقیق محاسبه نمود. اما در مورد بسیاری از سامانه‌های واقعی این امر امکان پذیر نبوده و یا با مشکلات جدی همراه است. مثال زیر نشانگر محدودیت کاربرد روش فوق در مورد یک مثال نسبتا پیچیده تر می‌باشد.



نفوذ شعاعی در سامانه‌های استوانه ای و کروی، شار انتقال جرم در شعاع های مختلف ثابت نبوده و به همین جهت می بایست رابطه‌ای بین تغییرات شار انتقال جرم با شعاع مربوطه در هر حالت به دست آورد.

مثال ۱۰-۳: مطابق شکل زیر یک ظرف استوانه‌ای که قسمت بالای آن به صورت مخروط ناقص می باشد حاوی مقداری آب است . فرض می شود که سطح آب در محل اتصال استوانه به مخروط ناقص ثابت بوده و توسط یک شناور، حجم آب تبخیر شده به صورت مداوم جایگزین می گردد. مطلوب است محاسبه جرم کل آب تبخیر شده در یک ساعت در صورتی که دما و فشار سامانه ثابت بوده و به ترتیب برابر ۲۵ درجه سلسیوس و ۱ اتمسفر باشند. رطوبت نسبی هوای محیط برابر ۲۰ درصد در نظر گرفته می شود.



حل: به منظور محاسبه شار انتقال جرم در هر فاصله معین (Z) از سطح آب، با توجه به نفوذ بخار آب در هوای ساکن ($\alpha_A = 1$) نتیجه می شود:

$$N_A = (N_A + 0) y_A - D_{AB} \frac{P_1}{RT} \frac{dy_A}{dz}$$

از سوی دیگر با فرض پایا بودن فرایند مقدار کل انتقال جرم در جهت محوری مخروط ناقص ثابت می باشد.

$$d(N_A . r^2) = 0 \Rightarrow N_A = N_{A1} \times \frac{r_1^2}{r^2} = N_{A2} \times \frac{r_2^2}{r^2}$$

اگر چه رابطه فوق کاملا مشابه سامانه کروی می باشد، اما جواب نهایی در این حالت اندکی متفاوت است.

در مثالی دیگر، چنانچه گاز متان بر روی سطح کاتالیزور و در دمای بالا شکسته شده و تبدیل به کربن و هیدروژن گردد، آنگاه با توجه به اینکه کربن تولید شده بر روی کاتالیزور رسوب می نماید، سازو کار انتقال جرم به طریق زیر به دست می آید:

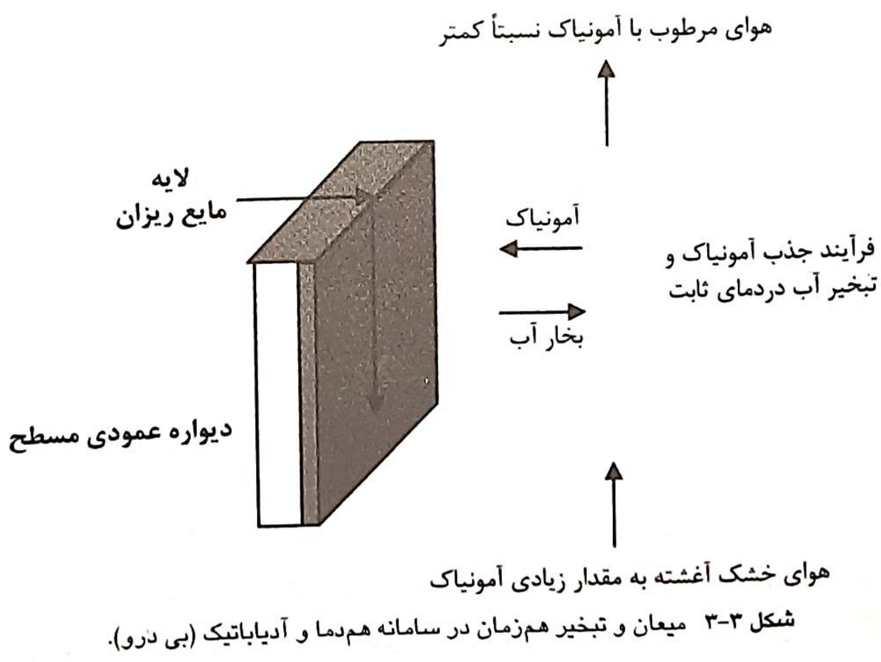
$$CH_4(g) \xrightarrow{CAT} C(s) + 2H_2(g)$$

A B C

$$\frac{N_A}{1} = -\frac{N_C}{2} \;\&\; N_B = 0 \Rightarrow \alpha_A = \frac{N_A}{N_A + N_C} = \frac{N_A}{N_A + 2N_A} = -1$$

با توجه به جهت متقابل شارهای آمونیاک و بخار آب می توان نوشت:

$$N_A\lambda_A = -N_B\lambda_B \Rightarrow \alpha_A = \frac{N_A}{N_A - \frac{\lambda_A}{\lambda_B}N_A} = \frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A}$$



شکل ۳-۳ میعان و تبخیر هم‌زمان در سامانه هم‌دما و آدیاباتیک (بی دررو).

روی آنها ضریب نفوذ آمونیاک در مخلوط گازی به دست آید. در دمای $200°C$ و فشار ۱ اتمسفر ضرایب نفوذ دو جزیی از رابطه ویلکی-لی (معادله ۲۶-۲) به صورت زیر محاسبه می گردند:

$$D_{NH3-N2} = 5.6\times10^{-5}\,\frac{m^2}{s} \qquad D_{NH3-N2} = 1.6\times10^{-4}\,\frac{m^2}{s} \qquad D_{NH3-N2} = 2.0\times10^{-5}\,\frac{m^2}{s}$$

با توجه به استوکیومتری واکنش، رابطه زیر بین شارهای اجزای مختلف وجود دارد:

$$\frac{N_A}{2} = -\frac{N_B}{1} = -\frac{N_C}{3}$$

پس از جای گذاری مقادیر ضرایب نفوذ دو جزئی گاز آمونیاک در معادله (۴۳)، مقدار ضرایب نفوذ من آمونیاک در مخلوط های دو طرف لایه مقاوم به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$(D_{AM}) = \frac{1+y_A}{\frac{1}{D_{AB}}(y_B+\frac{y_A}{2})+\frac{1}{D_{AC}}(y_c+\frac{3y_A}{2})}$$

$$(D_{AM})_1 = 1.2\times10^{-4}\,\frac{m^2}{s} \qquad (D_{AM})_2 = 1.2\times10^{-4}\,\frac{m^2}{s}$$

به طوری که ملاحظه می شود، در این مثال به ویژه به طور استثنائی مقدار ضرایب نفوذ متوسط در دو طرف لایه مقاوم با یکدیگر برابر هستند. به همین جهت، میانگین آنها نیز برابر با مقدار هر کدام از آنها خواهد بود. $(D_{AM})_{avg} = 1.2\times10^{-4}\,\frac{m^2}{s}$. اکنون، با توجه به ساز و کار انتقال جرم ($\alpha_A = -1$) شار نفوذ آمونیاک در مخلوط گازی به صورت زیر محاسبه می شود:

$$N_A = (-1)\left(\frac{1.2\times10^{-4}\times1}{82.056\times10^{-6}\times473\times10^{-3}}\right)In\left(\frac{-1-0}{-1-0.3333}\right) = 0.89\,\frac{gmole}{m^2s} = 0.0151\,\frac{kg}{m^2s}$$

1-2-3-4- محاسبه ضریب انتقال جرم برای فیلم مایع ریزان

مطابق شکل (3-4) یک لایه مایع به ضخامت δو با غلظت اولیه C_{A0} از روی یک دیواره عمودی به ارتفاع L و عرض W به پایین می ریزد. در مجاورت مایع مذکور یک گاز حاوی مقداری از جزء مورد نظر A در جریان است. می خواهیم ضریب انتقال جرم در داخل فاز مایع جهت نفوذ جزء A از فاز گاز به فاز مایع با استفاده از معادله های موازنه جرم و مومنتوم در دمای ثابت را به دست آوریم. با استفاده از معادله موازنه جرم در محور مختصات کارتزین (معادله ۹۶-۳) می توان نوشت:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t}+C_A(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z})+u_x\frac{\partial c_A}{\partial x}+u_y\frac{\partial C_A}{\partial y}+u_z\frac{\partial C_A}{\partial z}= D_{AB}(\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2})+r_A \qquad (4\text{-}41)$$

نظر به اینکه حل معادله دیفرانسیل نخست به صورت نمایی بوده و حل معادله دوم به صورت مجموعه‌ای از عبارات یک سری نامحدود می باشد، لذا حل نهایی (که حاصل ضرب حلهای مذکور است) نیز به صورت یک سری نامحدود خواهد بود. بدیهی است که نامحدود بودن تعداد عبارات موجود در حل نهایی، استفاده از آن در بسیاری از کاربردهای عملی را با مشکل مواجه می سازد. به همین جهت و با توجه به اینکه اگر چه تابعیت غلظت جزء مورد نظر(C_A) نسبت به Z از حیث حل معادله های بسیار مهم می باشد، اما اندازه گیری آن از حیث عملی دشوار بوده و معمولا برای کاربردهای واقعی چندان مورد نیاز نمی باشد. به همین جهت، بررسی تابعیت غلظت مذکور (C_A) نسبت به متغیر مستقل y از اهمیت بیشتری برخوردار است. با استفاده از غلظت معدل جزء مورد نظر در جهت z از رابطه زیر به دست می آید:

$$\overline{C}_A=\frac{1}{\overline{u}\,\delta}\int_{z=0}^{\delta}u_y C_{Ay}(Z)dz \qquad (4\text{-}55)$$

اکنون می توان حل نهایی به دست آمده برای معادله دیفرانسیل پاره ای (۵۰-۴) را با تعریف نمودن پارامتر $\eta=\frac{2D_{AB}.L}{3.\delta^2.u_y}$به صورت زیر نوشت [39]:

$$\varphi = \frac{C_{Ai} - \overline{C}_{AL}}{C_{Ai} - \overline{C}_{A0}} = 0.7857e^{-5.1213\eta} + 0.1001e^{-39.318\eta} + 0.03599e^{-105.64} + 0.01811e^{-204.75\eta}$$

(4-56)

با توجه به تعریف اعداد بدون بعد اشمیت، رینولدز و پکلت، پارامتر η را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\eta = \frac{8}{3}\left(\frac{L/\delta}{\mathrm{Re}.Sc}\right) = \frac{8}{3}\left(\frac{L/\delta}{Pe}\right) \quad (4\text{-}57)$$

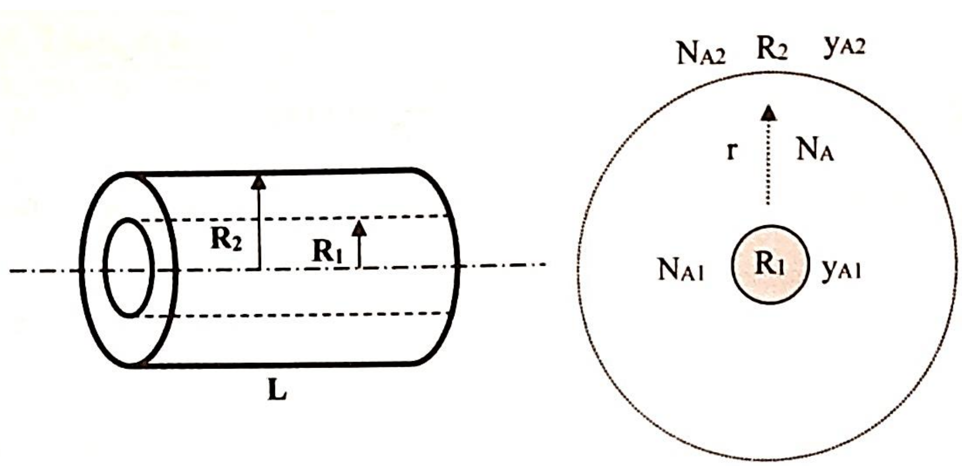
در نخستین حالت، با توجه به اینکه مطابق فرضیه های انجام شده می بایست هیچ گونه موج یا حرکت توده ای در فصل مشترک مایع و گاز وجود نداشته باشد. لذا شار انتقال جرم و به تبع آن ضریب انتقال جرم را می توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$N_A = k_L(C_{Ai} - C_A) = -D_{AB}\left.\frac{\partial C_A}{\partial Z}\right|_{Z=0} \quad (4\text{-}58)$$

2-2-1-3- انتقال جرم در جهت شعاعی از یک استوانه ساکن

مطابق شکل (۱۰-۳) چنانچه انتقال جرم در جهت شعاعی از سطح خارجی استوانه‌ای به طول مشخص به محیط اطراف و یا در جهت عکس صورت پذیرد، آنگاه دوباره مقدار شار انتقال جرم در مقاطع مختلف شعاعی متغیر بوده و تابعی از شعاع استوانه مفروض در نقطه مورد نظر می‌باشد. در این وضعیت نیز می توان موازنه جرم بین دو طرف لایه انتقال جرم نشان داده شده در شکل (۱۰-۳) را به صورت زیر نوشت:

مصرف - تولید+ خروجی - ورودی = انباشتگی



شکل ۳-۱۰ انتقال جرم پایا در جهت شعاعی از یک استوانه.

3-1-2-2-1- انتقال جرم پایا

با توجه به پایا بودن سامانه، مقدار انباشتگی صفر بوده و در غیاب واکنش شیمیایی معادله فوق به صورت زیر ساده می گردد:

خروجی= ورودی

مجددا پس از جایگذاری مقادیر مناسب برای لایه‌های انتقال جرم نشان داده شده در شکل (۱۰-۳) در مورد سامانه استوانه‌ای پایا نتیجه می شود:

$$N_{A1}\times M_A\times S_1=N_{A2}\times M_A\times S_2=N_A\times M_A\times S \quad (3\text{-}75)$$

همان گونه که پیش از این اشاره گردید، بر خلاف پارامتر N_A که هم مجهول بوده و هم متغیر می باشد، مقادیر شار N_{A1} و N_{A2} تنها مجهول بوده و چون برای مقطع معینی تعریف شده‌اند، بنابراین ثابت می باشند و می توان در مراحل بعد آنها را از انتگرال خارج نمود.

$$N_{A1}\times 2\pi R_1 L= N_A\times 2\pi L \Rightarrow N_A= N_{A1}\times (R_1/r) \quad (3\text{-}76)$$

بدیهی است که رابطه فوق را می‌توان به صورت دیفرانسیلی زیر نیز نشان داد:

$$\frac{d(N_A r)}{dr}=0 \quad (3\text{-}77)$$

به طریق مشابه می‌توان معادله (۷۶-۳) را برای جزء B نیز به صورت زیر نوشت:

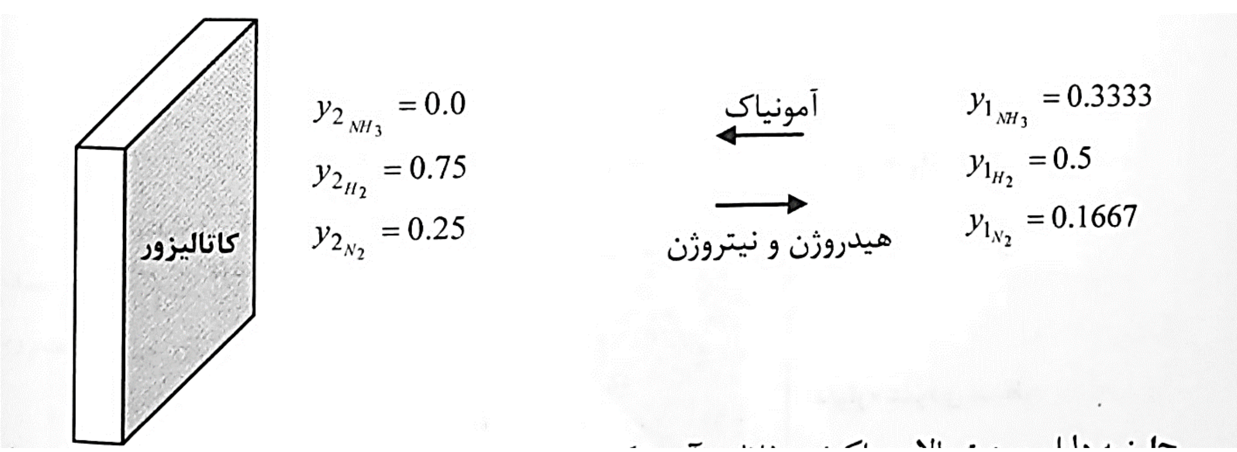
به عنوان مثال، چنانچه فرایند مذکور در دمای ۲۵°C و فشار آتمسفریک انجام گردد، آنگاه اطلاعات موجود در مراجع [40,43]، گرماهای نهان تبخیر آب و آمونیاک در شرایط فوق به ترتیب برابر ۲۳٫۷ و ۴۱ کیلوژول بر گرم مول می باشند. در این صورت پارامتر مربوط به ساز و کار انتقال جرم (α_A) به طور زیر محاسبه می شود:

$$\alpha_A = \frac{23.7}{23.7-41} = -1.37$$

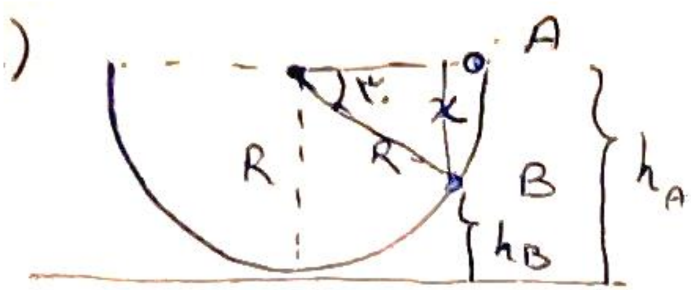
مثال ۱-۳: مطابق شکل زیر، مولکولهای گاز آمونیاک طبق واکنش زیر پس از انجام انتقال جرم و رسیدن بر روی سطح دیواره کاتالیزور جامد تجزیه می شوند.

$$2\,NH_3 \rightarrow N_2 + 3H_2$$

در یک مقطع از راکتور، دما و فشار عملیاتی به ترتیب برابر ۲۰۰°C و ۱ اتمسفر بوده و توده گاز مورد نظر حاوی ۳۳٫۳۳ درصد حجمی گاز آمونیاک (A)، ۱۶٫۶۷ درصد مولی گاز نیتروژن (B) و مابقی هیدروژن (C) می باشد. شرایط به گونه ای است که گاز آمونیاک از توده جریان به سطح کاتالیزور نفوذ نموده و در آنجا به سرعت شکسته می شود. سپس محصولات واکنش از درون یک لایه مقاوم به ضخامت 1 میلی متر به داخل توده جریان نفوذ می نمایند. مطلوب است محاسبه میزان سرعت مصرف آمونیاک برحسب کیلو گرم آمونیاک بر متر مربع سطح کاتالیزور بر ثانیه.



حل: به دلیل سرعت بالای واکنش، غلظت آمونیاک در سطح کاتالیزور عملا ناچیز بوده و صفر در نظر گرفته می شود. غلظت محصولات واکنش نیز با توجه به استوکیومتری واکنش تعیین می شوند. چنانچه نه گازها در شرایط رآکتور ایده آل در نظر گرفته شوند، آنگاه می توان درصد حجمی را معادل درصد مولی در نظر گرفت. برای محاسبه شار انتقال جرم لازم است ابتدا ضرایب نفوذ دو جزئی محاسبه گردیده و از



Sin 30= $\frac{x}{R} \rightarrow X = \frac{R}{2} = 5m$

$\rightarrow h_B = 10 - 5 = 5m$, hA= 10m

$k\!/\!A + V_A = K_B + V_B \qquad \rightarrow mgh_A = \frac{1}{2} mV_B^2 + mgh_B$

$\rightarrow 10 \times 10 = \frac{1}{2} N_B + 10 \times 5 \rightarrow V_2^2 = 100 \rightarrow V_2 = 10 \, m\!/\!s$

2) $\rightarrow \frac{1}{2} mV_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2} mV_B^2 + mgh_B$

$\rightarrow \frac{1}{2} \times (2) + 10(4) = \frac{1}{2} V_B^2 + 10(1) \rightarrow V_B^2 + 64 \rightarrow V_B = 8 \, m\!/\!s$

$o\,u \qquad 3 \qquad k_1 = k_2 + \frac{k_2}{v_2} = 2k_2$

3) $0\,k = v\ 2 \qquad \frac{1}{2} mv_1^2 = 2(\frac{1}{2} mv_2^2) \rightarrow v_2^2 = \frac{v_1^2}{2} = \frac{40^2}{2}$

$0\,k \quad 1 \qquad v_2 = \sqrt{800} = 20\sqrt{2} \quad m/s$

$k_1 = v_3 \rightarrow \frac{1}{2} mV_1^2 = mgh_3 \rightarrow \frac{1}{2}(40)^2 = 10(h_3) \rightarrow h_3 = 80m$

(راه دوم): $k_1 = k_2 + u_2 \rightarrow \frac{1}{2} mv_1^2 = \frac{1}{2} mV_2^2 + Mgh_2 \rightarrow \frac{1}{2}(40)^2 = \frac{1}{2} N_2^2 + 10(40)$

$\rightarrow N_2 = \sqrt{800} = 20\sqrt{2} \quad m/s$

4) $\frac{1}{2}mv_1^2 = k_2 + u_2$

$\frac{1}{2}mv_1^2 = 75 + mgh_2 \rightarrow \frac{1}{2}\times 2(10)^2 = 75 + 2\times 10\times h_2 \rightarrow h_2 = \frac{25}{20} = 1/25m$

5) $\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_2 \rightarrow \frac{1}{2}v_1^2 = 10\times 7/2 \rightarrow v_2^1 = 144 \rightarrow h = 9m$

6) $mg= 40 \rightarrow m=4kg$ $\quad$ $k/1+ U_1= K_2+U_2$

$K_2= 200g$ $\quad$ $mgh = \frac{1}{2}mV_2^2 + mgh_2$

$h_2= 4m$ $\quad$ $4\times 10\times h=200+4\times 10\times 4 \rightarrow h=9m$

$h_1= ?$

7) $V_1= 30\ M/S$ $\quad$ $K_1+U_1= K_2+U_2$

$h_2=?$ $\quad$ $K_1= \frac{1}{2}u_2 + U_2 = \frac{3}{2}U_2 \rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{3}{2}\times mgh$

$k_2 = \frac{1}{2}U_2$ $\quad$ $(30)^2=3\times 10\times h \rightarrow h=30m$

3-1-2-1-1- انتقال جرم پایا

در این حالت مقدار انباشتگی برابر صفر بوده و در غیاب واکنش شیمیایی، معادله موازنه جزئی جرم به صورت زیر ساده می گردد:

خروجی = ورودی

پس از جای گذاری مقادیر مناسب برای لایه های سه گانه نشان داده شده در شکل (3-7)، نتیجه می شود:

$$N_{A1}\times M_A\times S_1= N_{A2}\times M_A\times S_2= N_A\times M_A\times S \qquad (3\text{-}40)$$

در رابطه فوق، پارامترهای N_{A1}، N_{A2} و N_A به ترتیب میزان شار انتقال جرم در ابتدا، انتها و هر مقطع دلخواه از لایه انتقال جرم به شعاع r می باشند. همچنین پارامتر S نشانگر سطح مقطع عمود بر جهت انتقال جرم در شعاع مورد نظر می باشد. بایستی توجه داشت که بر خلاف N_A که هم مجهول بوده و

هم متغیر می باشد، مقادیر N_{A1} و N_{A2} تنها مجهول بوده و چون برای مقاطع معینی تعریف شده‌اند، لذا مقدار آنها ثابت است.

$$N_{A1}\times 4\pi R_1^2 = N_{A2}\times 4\pi R_2^2 = N_A \times 4\pi r^2 \Rightarrow N_A = N_{A1}\times\frac{R_1^2}{r^2} = N_{A2}\times\frac{R_2^2}{r^2} \qquad (3\text{-}41)$$

رابطه فوق را می توان به صورت دیفرانسیلی زیر نیز نشان داد:

$$\frac{d(N_A r^2)}{dr} = 0 \qquad (3\text{-}42)$$

به طریق مشابه می توان معادله (۴۱-۳) را برای جزء B نیز به صورت زیر نوشت:

$$N_B = N_{B1}\times\frac{R_1^2}{r^2} = N_{B2}\frac{R_2^2}{r^2} \qquad (3\text{-}43)$$

با توجه به همسویی جهت انتقال جرم با dr، اکنون می توان با جای گذاری مقادیر شارهای A و B از معادله های (۴۱-۳) و (۴۳-۳) در معادله (1-3) و ساده سازی آن برای مخلوط های دو جزئی گازی نتیجه گرفت:

$$\frac{dy_A}{[(N_{A1}+N_{B1})y_A - N_{A1}]R_1^2} = \frac{RT}{D_{AB}P_1}\frac{dr}{r^2} \qquad (3\text{-}44)$$

بر خلاف مقادیر N_A و N_B که تابع شعاع (r) بوده و ثابت نمی باشند، مقادیر N_{A1}, N_{B1} ثابت بوده و به همین جهت می‌توان از معادله (۴۴-۳) به سهولت و به صورت زیر انتگرال گرفت:

$$\int_{yA1}^{yA}\frac{dy_A}{[(N_{A1}+N_{B1})y_A - N_A]R_1^2} = \int_{R_1}^{R_2}\frac{RT}{D_{AB}P_t}\frac{dr}{r^2} \qquad (3\text{-}45)$$

$$N_{A1} = \frac{N_{A1}}{N_{A1}+N_{B1}}\left(\frac{D_{AB}P_1}{RT \quad R_1^2\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)} In\left[\frac{\frac{N_{A1}}{N_{A1}+N_{B1}} - y_{A2}}{\frac{N_{A1}}{N_{A1}+N_{B1}} - y_{A1}}\right]\right)$$

غلظت جزء A بر حسب r را به دست آوریم، می بایست از رابطه دیفرانسیلی حاصل از موازنه جرم که پیش از این به آن اشاره گردید (معادله 3-42) استفاده نمود:

$$\frac{d(N_A r^2)}{dr} = 0 \qquad (3\text{-}48)$$

همچنین مشابه معادله (3-46) می‌توان نوشت:

$$N_A r^2 = \frac{\alpha_A D_{AB\backslash} P_1}{RT}\left(\frac{R_1 r}{r-R_1}\right) In\left[\frac{\alpha_A - y_A}{\alpha_A - y_{A1}}\right] \qquad (3\text{-}49)$$

می‌باید توجه داشت که اگرچه شارهای انتقال جرم (یعنی N_{B1},N_{A1}) مجهول می باشند، لیکن همان گونه که در مثال های متعدد ابتدای فصل بیان گردید، ممکن است بتوان ساز و کار انتقال جرم (یعنی α_A) را به صورت مستقل از ابتدا محاسبه نمود. بدین ترتیب پس از جای گذاری مقدار Nar در معادله دیفرانسیلی فوق نتیجه می گردد:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\alpha_A D_{AB} P_1}{RT}\left(\frac{R_1 r}{r-R_1}\right) In\left[\frac{\alpha_A - y_A}{\alpha_A - y_A}\right]\right) = 0$$

اگرچه شارهای N_A و N_B تابعی از مکان (r) می باشند، اما ساز و کار انتقال جرم عموما برای یک سامانه مشخص مقدار ثابتی بوده و تابع مکان نمی باشد. به همین جهت، با توجه به ثابت بودن مقادیر پارامترهای $\alpha_A,D_{AB},P_t,R_1,T$ نسبت به شعاع، رابطه فوق به صورت زیر خلاصه می گردد:

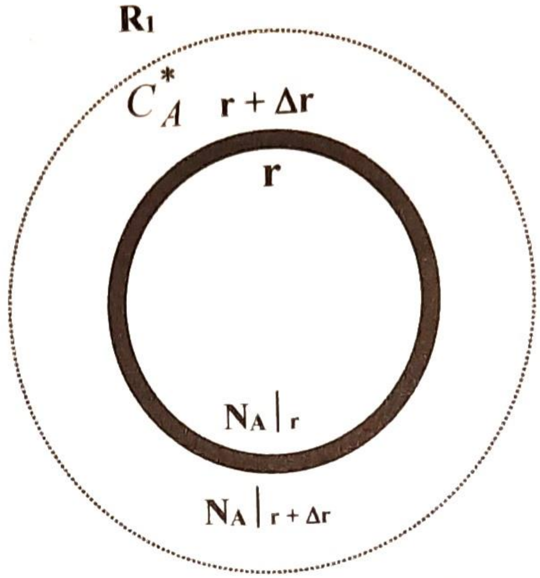
$$\frac{dy}{dr}\left(\left(\frac{r}{r-R_1}\right) In\left[\frac{\alpha_A - y_A}{\alpha_A - y_{A1}}\right]\right) = 0 \qquad (3\text{-}50)$$

پس از بسط معادله فوق و ساده نمودن آن نتیجه می گردد:

$$In\left[\frac{\alpha_A - y_A}{\alpha_A - y_{A1}}\right]\left(\frac{-R_1}{(r-R_1)^2}\right) + \left[\frac{-r}{(r-R_1)(\alpha_A - y_A)}\right]\frac{dy_A}{dr} = 0 \qquad (3\text{-}51)$$

برای انتگرال گیری از تابعیت فوق و تعیین توزیع غلظت جزء مورد نظر برحسب مکان، می بایست از مراجع ریاضی ذی ربط استفاده نمود.

3- انتقال جرم ناپایا



برای تعیین تابعیت غلظت جزء مورد نظر (A) نسبت به زمان و مکان ($C_A(r,t)$ ، در حین انجام فرایند انتقال جرم ناپایا، می‌توان موازنه جزئی جرم در غیاب واکنش شیمیایی، حول جزء دیفرانسیلی به ضخامت Δr را به صورت زیر نوشت:

مصرف - تولید به خروجی - ورودی = انباشتگی

$$\frac{d}{dr}(4\pi r^2 \Delta r C_A) = (N_A 4\pi r^2)|_r - (N_A 4\pi\, r^2)\Big|_{r+\Delta r} \qquad (3\text{-}52)$$

با توجه به اینکه پارامتر r شعاع دلخواه جزء دیفرانسیلی بوده و با زمان تغییر نمی نماید، لذا پس از تقسیم دو طرف معادله فوق بر $4\pi\Delta r$ و ساده سازی آن در حالت حدی ($\Delta r \rightarrow 0$) با استفاده از تعریف مشتق نتیجه می شود:

$$r^2 \frac{\partial C_A}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r}(r^2 N_A) \qquad (3\text{-}53)$$

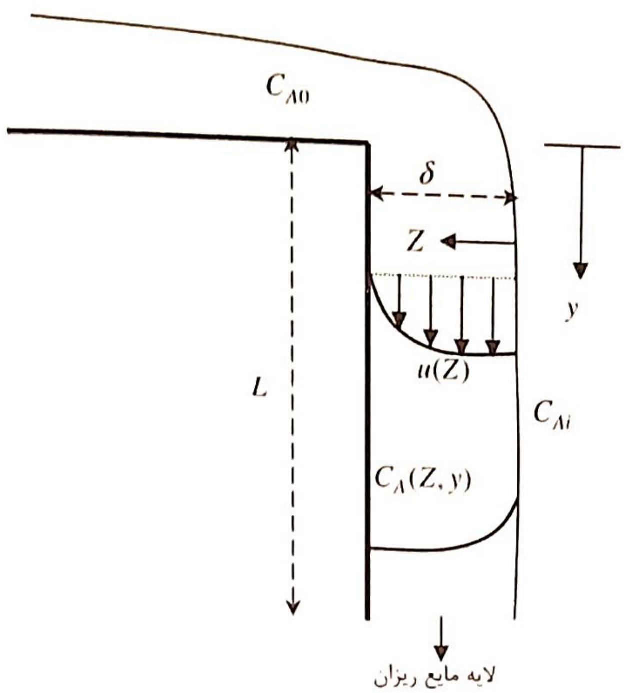
همان گونه که پیش از این اشاره گردید، حل معادله فوق برای حالت کلی (یعنی تمامی سازو کارهای انتقال جرم) نسبتا دشوار بوده و به همین جهت در این قسمت تنها به استخراج معادله های مورد نیاز برای

یکی از سازوکارهای ساده انتقال جرم یعنی نفوذ متقابل جزء A با مول یکسان ($\alpha_A=\infty$) که برای فرایند نفوذ در درون جامدات نیز صادق است، بسنده می گردد. در این صورت با توجه به عدم وجود انتقال جرم توده ای، می توان نوشت:

$$N_A = J_A = -D_{AB}\frac{\partial C_A}{\partial r} \qquad (3\text{-}54)$$

N پس از جای گذاری نتیجه می گردد:

$$r^2\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{AB}(r^2\frac{\partial^2 C_A}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial C_A}{\partial r}) \qquad (3\text{-}55)$$



شکل ۴-۳ نمودار مربوط به لایه مایع ریزان از دیواره عمودی.

بدیهی است که حل معادله دیفرانسیل پاره‌ای فوق در حالت کلی بسیار مشکل بوده و به همین جهت می بایست از برخی فرضیه های ساده کننده مناسب استفاده گردد. مهم ترین فرضیه‌های به کار گرفته شده در مورد لایه مایع ریزان مورد نظر عبارتند از:

1. فرایند به صورت پایا انجام می گیرد ۲. کلیه خواص فیزیکی سیال ثابت در نظر گرفته می شود (با توجه به ثابت بودن دما و با فرض اینکه تغییرات غلظت سیال در حین ریزش ناچیز باشد، این فرض قابل قبول است)

۳. واکنش شیمیایی در سامانه انجام نمی گیرد ($r_A=0$)

4. از نفوذ مولکولی در جهت ریزش سیال (y) صرف نظر می شود.

5. جریان توده سیال در جهت عموود بر دیواره (Z) ناچیز است ($u_z=0$).

6. هیچ گونه تغییراتی در جهت عرض دیواره (x) وجود ندارد ($\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}=0$)

۷. سطح تماس لایه مایع و گاز به صورت صاف بوده و فاقد موج می باشد

با توجه به فرضیات فوق معادله (۴۱-۴) به صورت زیر ساده می گردد:

$$u_y\frac{\partial C_A}{\partial y}=D_{AB}\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \qquad (4\text{-}42)$$

برای حل این معادله نیاز به تعریف یک شرط مرزی در جهت عمودی (y) و دو شرط مرزی در جهت افقی(z) می باشد که به صورت زیر تعریف می شوند.

$C_A(y=0,z)=C_{A0}$

پس از ساده سازی معادله فوق و انتگرال گیری می توان زمان مورد نیاز برای کاهش قطر قطره اولیه آن از شعاع اولیه /R به مقدار نهایی R را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\int_0^1 dt=\frac{pRT}{-D_{AB}P_tMIn\left[\frac{1-y_{A\infty}}{1-y_A^{\times}}\right]}\int\frac{r}{R_\infty}(R_\infty-r)dr \qquad (3\text{-}71)$$

$$t=\frac{pRT}{-D_{AB}P_tMIn\left[\frac{1-y_{A\infty}}{1-y_A^{\times}}\right]R_\infty}(R_\infty\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3})\Big|_{R1}^{R_2} \qquad (3\text{-}72)$$

$$t = \frac{pRT}{-D_{AB}P_t MIn\left[\frac{1-y_{A\infty}}{1-y_A^{\times}}\right]R_\infty}[(R_\infty \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} - (\frac{R_2^3 - R_1^3}{3})] \qquad (3\text{-}73)$$

چنانچه قطره آب در هوای نامحدود ($R_\infty \to \infty$) تبخیر گردد ، آنگاه رابطه فوق به صورت زیر ساده می شود:

$$t = \frac{pRT}{D_{AB}P_t MIn\left[\frac{1-y_{A\infty}}{1-y_A^{\times}}\right]_\infty} (\frac{R_2^2 - R_1^2}{2}) \qquad (3\text{-}74)$$

بدیهی است در صورتی که بخواهیم زمان تبخیر کامل قطره آب را محاسبه نماییم کافی است به جای $R_2 \neq 0$ مقدار بسیار ناچیزی برای شعاع ثانویه قطره فرض گردد.

مثال ۷-۳: مطلوب است محاسبه زمان لازم برای کاهش شعاع یک قطره آب از ۲ میلی متر به ۱ میلی متر چنانچه قطره مذکور در هوای نامحدود با رطوبت نسبی ۱۰ درصد در دما و فشار ۲۰ درجه سلسیوس وا آتمسفر به صورت معلق قرار داشته باشد؟

$$T = 20°C \to P° = 17.535 mmHG \to y = \frac{17.535}{760} = 0.023 \qquad (15)$$

$$(RH)_\infty = 0.1 = \frac{P_{A\infty}}{P_A^{\times}} \to P_{A\infty} = 0.1P_A^{\times} \to y_\infty = o.1y^{\times} = 0.0023$$

$$D_{H20-air}\Big|_{20°c} \approx 2.5\times10^{-5}\frac{m^2}{s} \qquad (11) \qquad p_w\Big|_{20°C} = 998\frac{kg}{m^3}$$

$$t = \frac{998\times10^3\times82.056\times10^{-6}\times293}{In\left[\frac{1-0.0023}{1-0.023}\right](-2.5\times10^{-5}\times1\times18)}\left[\frac{(0.001)^2-(0.002)^2}{2}\right] = 3815s = 1.06hr$$

علاوه بر سامانه های کروی، مقدار شار انتقال جرم در جهت شعاعی سامانه های استوانه ای شکل نیز متغیر می باشد که در قسمت بعد به آن پرداخته خواهد شد.

با فرض اینکه مقدار متغیر مستقل r مخالف صفر باشد، آنگاه می توان دو طرف را بر مقدار r^2 تقسیم نمود:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{AB}\left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial C_A}{\partial r}\right) \qquad (3\text{-}56)$$

از سوی دیگر، با توجه به تقارن موجود در سامانه که باعث توزیع متقارن غلظت جزء مورد نظر (A) نسبت به r می گردد، می توان شرط مرزی مورد نیاز سوم را به صورت زیر نوشت:

$$\lim_{r\to 0} C_A(r,t) = finite \Rightarrow \frac{\partial C_A}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0$$

$$\frac{C(r,t) - C_A^0}{(C_{A0} - C_A^{\times})} = +\frac{2R_1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{N+1}}{nr}\exp\left(-D\frac{\pi^2 n^2 t}{R_1^2}\right)Sin\left(\frac{\pi\ n\ t}{R_1}\right) \qquad r\neq 0\ ,\ n= 1,2,\ \ldots \quad (3\text{-}57)$$

معمولا معادله های فوق برای مواردی که زمان انتقال جرم زیاد و یا عبارت (Dt/R_1^2) بزرگ باشد، مناسب بوده و به سرعت همگرا می گردد. در سایر موارد بهتر است از معادله های زیر که از روش تبدیل لاپلاس به دست آمده اند استفاده شود.

$$C_A = C_{A0} + \frac{R_1}{r}(C_A^0 - C_{A0})\sum_{n=0}^{\infty}\left[erfc\frac{(2n+1)R_1 - r}{2\sqrt{Dt}} - erfc\frac{(2n+1)R_1 - r}{2\sqrt{Dt}}\right] \qquad (3\text{-}58)$$

جزئیات هر دو روش حل فوق به تفصیل در مرجع [74] ارائه گردیده اند.

اکنون با معلوم بودن توزیع غلظت جزء A در درون حجم کروی می توان شار لحظه ای انتقال جرم را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$N_{A1} = -D_{AB}\frac{\partial C_A}{\partial r}\Big|_{r=R_1} = D_{AB}\frac{2}{R_1}(C_{A0} - C_A^{\times})\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-D\frac{\pi^2 n^2 t}{R_1^2}\right) \qquad (3\text{-}59)$$

همان گونه که ملاحظه می شود، شار لحظه ای انتقال جرم با افزایش زمان کاهش می یابد. زیرا با مرور زمان از مقدار جزء A در درون حجم کروی به تدریج کاسته می شود. مقدار کل شار انتقال جرم در هر لحظه برابر است با :

$$. N_A = N_{A1} \times 4\pi R_1^2 = 8\pi D_{AB} R_1 (C_{A0} - C_A^{\times}) \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-D \frac{\pi^2 n^2 t}{R_1^2}) \qquad (3\text{-}60)$$

مثال ۵-۴: آب با جریان حجمی یک دهم متر مکعب در ساعت در دما و فشار محیط (25°C,1 atm) از روی دیوارهای به عرض ۵۰ سانتی متر در حال ریزش است. مطلوب است محاسبه ضخامت لایه آب در حال ریزش.

حل:

$$Q = \bar{u}A = 0.1 m^3 / hr = 2.8 \times 10^{-5} m^3 / s$$

$$A = w \times \delta = w \times \left(\frac{3\bar{u}\ \mu}{p \quad g} \right)^{1/2}$$

پس از جای گذاری مقدار سطح جریان (A) در معادله مربوط به جریان حجمی و با فرض آنکه شتاب ثقل برابر $9.8\ m^2/s$ بوده و جرم حجمی و گرانروی آب در شرایط مذکور حدود و $\mu = 10^{-3}$ kg/ m.s ,p=1000kg/m^3 فرض شوند، نتیجه می گردد :

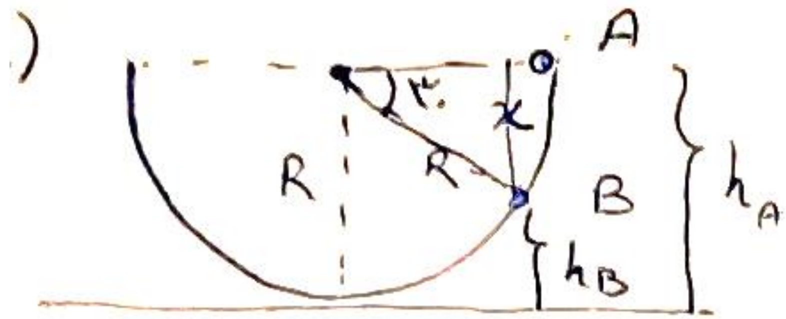
$$2.8 \times 10^{-5} = \bar{u} \times 0.5 \times \left[\frac{3 \times \bar{u}_y \times 10^{-3}}{1000 \times 9.8} \right]^{1/2} \Rightarrow \bar{u} = 0.22 \frac{m}{s}$$

پس از جای گذاری مقدار سرعت متوسط در معادله (۴۶-۴)، ضخامت لایه مایع ریزان برابر 2.6×10^{-4} m (معادل ۰,۲۶ میلی متر) محاسبه می گردد. بدیهی است با توجه به ناچیز بودن ضخامت فیلم مایع ریزان، تأثیر دیواره جامد بر آن زیاد بوده و به همین جهت ضخامت آن در حین ریزش تقریبا ثابت باقی می ماند.

اکنون می توان توزیع به دست آمده برای سرعت لابه مایع ریزان را در معادله دیفرانسیل پارهای (۴-۴۲) قرار داد و با توجه به شرایط مرزی مربوطه، آن را حل نمود.

$$\frac{pg\delta^2}{2\mu}(1-\left(\frac{z}{\delta}\right)^2)\frac{\partial C_A}{\partial y}=D_{AB}\frac{\partial^2 C_A}{\partial Z^2} \qquad (4\text{-}48)$$

به منظور تسهیل در حل معادله فوق، می توان به صورت زیر نسبت به بی بعد ساختن غلظت جزء مورد نظر اقدام نمود. در این صورت معادله مذکور و شرایط مرزی مربوطه (برای حالتی که زمان تماس نسبتا زیاد باشد) به شکل زیر تغییر می نمایند:



Sin 30= $\frac{x}{R}\rightarrow X=\frac{R}{2}=5m$

$\rightarrow h_B=10-5=5m$, h_A= 10m

$k/A+V_A=K_B+V_B \qquad \rightarrow mgh_A=\frac{1}{2}mV_B^2+mgh_B$

$\rightarrow 10\times 10=\frac{1}{2}N_B+10\times 5\rightarrow V_2^2=100\rightarrow V_2=10\,m/s$

2) $\rightarrow\frac{1}{2}mV_A^2 \;+mgh_A=\frac{1}{2}mV_B^2+mgh_B$

$\rightarrow\frac{1}{2}\times(2)+10(4)=\frac{1}{2}V_B^2+10(1)\rightarrow V_B^2+64\rightarrow V_B=8\,m/s$

$o\,u \qquad 3 \qquad k_1=k_2+\frac{k_2}{v_2}=2k_2$

3) $0\,k=v\;\;2 \qquad \frac{1}{2}mv_1^2=2(\frac{1}{2}mv_2^2)\rightarrow v_2^2=\frac{v_1^2}{2}=\frac{40^2}{2}$

$0\,k \quad 1 \qquad v_2=\sqrt{800}=20\sqrt{2}\quad m/s$

$$k_1 = v_3 \rightarrow \frac{1}{2}mV_1^2 = mgh_3 \rightarrow \frac{1}{2}(40)^2 = 10(h_3) \rightarrow h_3 = 80m$$

راه دوم): $k_1 = k_2 + u_2 \rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mV_2^2 + Mgh_2 \rightarrow \frac{1}{2}(40)^2 = \frac{1}{2}N_2^2 + 10(40)$

$$\rightarrow N_2 = \sqrt{800} = 20\sqrt{2} \quad m/s$$

4) $\frac{1}{2}mv_1^2 = k_2 + u_2$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = 75 + mgh_2 \rightarrow \frac{1}{2}\times 2(10)^2 = 75 + 2\times 10\times h_2 \rightarrow h_2 = \frac{25}{20} = 1/25m$$

5) $\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_2 \rightarrow \frac{1}{2}v_1^2 = 10\times 7/2 \rightarrow v_2^1 = 144 \rightarrow h = 9m$

6) mg= 40 $\rightarrow$ m=4kg　　　　k/1+ U_1= K_2+U_2

K_2= 200g　　　　$mgh = \frac{1}{2}mV_2^2 + mgh_2$

h_2= 4m　　　　4×10×h=200+4×10×4 $\rightarrow$h=9m

h_1= ?

7) V_1= 30 M/S　　　　K_1+U_1= K_2+U_2

h_2=?　　　　K_1= $\frac{1}{2}u_2 + U_2 = \frac{3}{2}U_2 \rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{3}{2}\times mgh$

$k_2 = \frac{1}{2}U_2$　　　　$(30)^2$=3×10×h$\rightarrow$h=30m

الف) روش سطح ثابت: با توجه به اینکه مقدار ضخامت لایه انتقال جرم (Z) در معادله (3-3) برابر 50 سانتی متر می‌باشد، لذا پس از جای گذاری در معادله مذکور، مقدار شار انتقال جرم به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$y_{A1} = \frac{P^\circ|_{25.9}}{P_t} = \frac{25}{760} = 0.033$$

$$D_{water-Air}\Big|_{25.9^\circ c.1afm} = 2.58\times 10^{-5} m^2/s$$

$$N_A = \frac{2.58\times 10^{-5}\times 1}{82.056\times 10^{-6}\times 299\times 0.5} In\left[\frac{1-0}{1-0.033}\right] = 7.06\times 10^{-5}\frac{gmole}{m^2.s}$$

$$t = \frac{n_A}{A_1 \times N_{A1}} = \frac{55.4}{2\pi \times 0.1 \times 1 \times 1 \times 7.06 \times 10^{-5}} = 1.25 \times 10^6 S = 14.5 DAYS$$

ب) روش سطح متغیر:

$$N_A = \frac{2.58 \times 10^{-5} \times 1}{82.056 \times 10^{-6} \times 299 \times In(0.6/01)} In\left[\frac{1-0}{1-0.033}\right] = 1.97 \times 10^{-5} \frac{gmole}{m^2.s}$$

$$t = \frac{n_A}{A_1 \times N_{A1}} = \frac{55.4}{2\pi \times 0.1 \times 1 \times 1 \times 97 \times 10^{-5}} = 4.48 \times 10^6 S = 51.8 DAYS$$

به طوری که ملاحظه می گردد، روش مبتنی بر سطح ثابت بسیار متفاوت از روش صحیح تر یعنی رابطه مبتنی بر سطح متغیر پاسخ می دهد.

مشابه حالت قبل، به دلیل معلوم نبودن مقدار شار انتقال جرم (N_{A1})، تابعیت غلظت بر حسب مکان در معادله (۸۲-۳) به صورت غیر مستقیم و ضمنی می باشد. برای محاسبه رابطه صریح توزیع غلظت جزء A برحسب r، می بایست از معادله دیفرانسیلی موازنه جرم زیر استفاده نمود:

$$\frac{d(N_A r)}{dr} = 0 \qquad (3\text{-}83)$$

همچنین داریم:

$$N_{A1} R_1 = N_A r = \alpha_A \frac{D_{AB} P_1}{RT \quad In(r/R_1)} In\left[\frac{\alpha_A - y_A}{\alpha_A - y_{A1}}\right] \qquad (3\text{-}84)$$

با توجه به ثابت بودن ساز و کار انتقال جرم (یعنی α_A) پس از جایگذاری مقدار $N_A \times r$ در معادله دیفرانسیلی فوق نتیجه می گردد:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\alpha_A D_{AB} P_t}{RT \ In(r/R_1)} In\left[\frac{\alpha_A - y_A}{\alpha_A - y_{A1}}\right]\right) = 0$$

با توجه به ثابت بودن مقادیر پارامترهای $\alpha_A, D_{AB}, P_T, R_1, T$ به نسبت به شعاع، رابطه فوق به صورت زیر خلاصه می گردد:

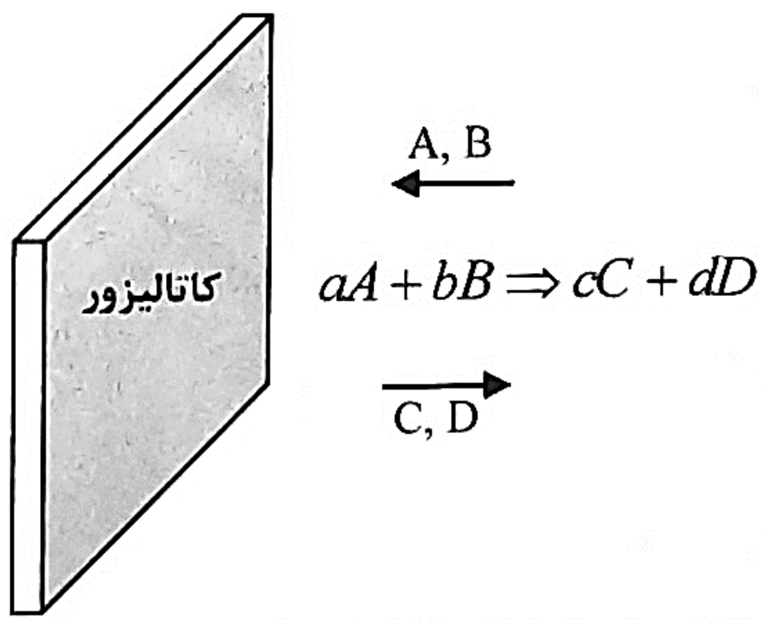
3-1- ساز و کارهای مختلف در انتقال جرم

برای به دست آوردن شار انتقال جرم از رابطه (3-2) ابتدا می‌بایست ساز و کار انتقال جرم (یعنی نسبت خ $N_A/\sum_{i=1}^{n} N_A$ تعیین گردد. این امر به روشهای گوناگون امکن پذیر می باشد. برای مثال، چنانچه انتقال جرم به صورت متوالی و همراه با واکنشهای شیمیایی انجام گردد، آنگاه می‌توان با استفاده از استوکیومتری واکنش شیمیایی نسبت به تعیین ساز و کار انتقال جرم اقدام نمود. چنانچه مطابق شکل (3-2) واکنش زیر بر روی دیواره سطح کاتالیزوری انجام گردد:

$$Aa+bB\rightarrow Cc+dD \qquad (3\text{-}9)$$

در این صورت با توجه به ضرایب استوکیومتری واکنش، رابطه زیر بین شارهای انتقال جرم مربوط به اجزای مختلف برقرار است:

$$\frac{N_A}{a}=\frac{N_B}{b}=-\frac{N_c}{C}=-\frac{N_D}{d}$$



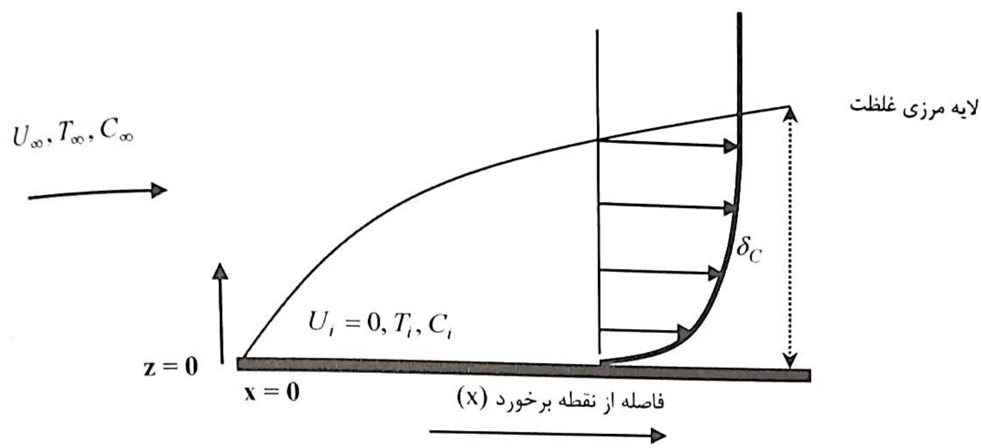
شکل ۳-۲ انتقال جرم هم‌زمان با واکنش شیمیایی بر روی کاتالیزور مسطح.

برای مثال چنانچه گاز مونواکسید کربن پس از انجام انتقال جرم و رسیدن به سطح دیواره مسطح نیکلی با آن واکنش نموده و نیکل کربنیل $Ni(CO)_4$ تولید نماید آنگاه ساز و کار انتقال جرم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$4Co+Ni \rightarrow Ni(Co)_4$

A B C

$$\frac{N_A}{4} = -\frac{N_c}{1} \,\&\, N_B = 0 \Rightarrow \alpha_A = \frac{N_A}{N_A + N_C} = \frac{N_A}{N_A - \frac{1}{4}N_A} = \frac{4}{3}$$



با توجه به فرضیات زیر می‌توان معادله فوق را ساده نمود و با اعمال شرایط مرزی مناسب (دو شرط مرزی در جهت Z و یک شرط مرزی در جهت x) آن را حل کرد:

1- جریان سیال پایا می باشد.

2- تمامی خواص سیال به علت یکسان بودن دما و فشار ثابت است.

3- مولفه سرعت در جهت y وجود ندارد

4- مولفه سرعت در جهت y ناچیز است.

5- از نفوذ در جهت x به دلیل وجود جریان توده سیال صرفنظر می‌شود.

6- واکنش شیمیایی وجود ندارد.

$$u_x \frac{\partial C_A}{\partial x} + u_z \frac{\partial C_z}{\partial z} = D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \qquad (4\text{-}76)$$

$C_A(x=0,z)=C_{A0}, C_A(x,z=\infty)=C_{A0}$ یا $\left.\frac{\partial C_A}{\partial Z}\right|_{Z=\delta_C}$

$C_A(x,Z=0)=C_{A1}$ یا $\left.\frac{\partial^2 C_A}{\partial Z^2}\right|_{Z=\delta_C}=0$

به منظور حل معادله دیفرانسیل فوق لازم است تا توزیعهای سرعتهای u_x,u_y بر حسب فاصله از نقطه برخورد اولیه (x=0) و فاصله از دیواره (z) محاسبه گردد. به این منظور می‌بایست مولفه معادله حرکت برای جهات z,x سیال غیرقابل تراکم به صورت زیر نوشته شود.

مولفه در جهت x:

$$p\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)+pg_x$$

مولفه در جهت z:

$$p\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)+pg_x$$

(به دلیل ثابت بودن دما مقدار حلالیت در طول دیواره ثابت می‌باشد)

$C_A(y,z=0)= C_{A1}$

(شرط عدم انتقال جرم (نفوذ) با دیواره)

$$\frac{\partial C_A}{\partial Z}(y,z=\delta)=0$$

علاوه بر شرایط مرزی فوق می‌بایست تابعیت توزیع سرعت (u_y) نسبت به جهات افقی و عمودی (y,z) نیز به صورت صریح مشخص گردد. برای این منظور می توان از معادله موازنه مومنتوم در جهت عمودی (y) برای سیال غیرقابل تراکم استفاده نمود (75).

$$p\left(\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}\mu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right)+pg_y \qquad (4-43)$$

با توجه به فرضیه های هفت گانه در نظر گرفته شده قبل و همچنین با ثابت فرض نمودن ضخامت لایه سیال در حال ریزش (δ) معادله فوق به صورت زیر ساده می گردد:

$$\mu \frac{d^2 u_y}{\partial Z^2} + pg = 0 \qquad (4\text{-}44)$$

بدیهی است با توجه به ثابت گرفتن ضخامت لایه مایع ریزان در طول ریزش سرعت سیال تابع جهت عمودی (y) نبوده و برای حل معادله دیفرانسیلی فوق نیاز به دو شرط مرزی زیر می باشد.

$$\left.\frac{\partial u_y}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$$

ناچیز فرض نمودن تنش برشی بین سیال ریزان و گاز

$$\left. u_y \right|_{z=\delta} = 0$$

وضعیت

بدون لغزش

پس از حل معادله دیفرانسیل فوق و اعمال شرایط مرزی ذکر شده توزیع سرعت سیال به صورت زیر محاسبه می گردد.

$$u_y = \frac{p.g.\delta^2}{2\mu}\left[1-\left(\frac{Z}{\delta}\right)^2\right] \qquad (4\text{-}45)$$

با توجه به تعریف سرعت متوسط سیال می‌توان نوشت:

$$\bar{u}_y = \frac{\int_0^\delta u_y dz}{\int_0^\delta dz} = \frac{pg\delta^2}{3.\mu} \Rightarrow \delta = \left(\frac{3\bar{u}}{pg}\right)^{1/2} \qquad (4\text{-}46)$$

با استفاده از قطر هیدرولیکی عدد رینولدز برای فیلم مایع ریزان به صورت زیر تعریف می گردد.

$$D_H = \frac{4A}{p} = \frac{4.(w\times\delta)}{w} = 4\delta \Rightarrow \mathrm{Re} = \frac{puD_H}{\mu} = \frac{4p.u.\delta}{\mu} \qquad (4\text{-}47)$$