

Title: Advanced Mass Transfer

Text Book :

Diffusion Mass Transfer

by: Skelland

References:

- Transport Phenomena** by: Bird
Element of Transport Phenomena
by: Leighton &
Sisson
Chemical Engineering Vol.1
by: Colson
- Richardson**
Heat and Mass Transfer
by: Eckert &
- Dracke**
Analysis of Heat & Mass Transfer
by: Eckert &
- Dracke**
Mass Transfer by: Kays

Points:

Homework	10%
Midterm	40%
Project	15%
Final	35%

Total	100%

چند تعریف از غلظت:

غلظت جرمی = جرم جزء مورد نظر در
واحد حجم مخلوط یا محلول

غلظت مولی = تعداد مول جزء مورد نظر
در واحد حجم مخلوط یا محلول

جزء جرمی = نسبت جرم جزء مورد نظر به
کل جرم مخلوط یا محلول

جزء مولی = نسبت تعداد مول جزء مورد
نظر به کل مول مخلوط یا محلول

علامات مورد استفاده جهت نمایش غلظت های
فوق در مورد جزء (i) به شرح زیر می باشند

غلظت جرمی	غلظت مولی	جزء جرمی	جزء مولی
ρ_i	C_i	ω_i	x_i

بین انواع تعریف غلظت روابط زیر و همچنین
روابط ارائه شده در جدول ۱ برقرار میباشد

$$c_i = \frac{\rho_i}{M_i} \leftrightarrow \omega_i = \frac{\rho_i}{\rho} \leftrightarrow x_i = \frac{c_i}{c} \quad 1$$

در مخلوطی که نفوذ مولکولی در آن صورت می گیرد ذرات مختلف دارای سرعت مختلف می باشند

در چنین شرایطی اگر n ذره در مخلوط موجود باشند، سرعت متوسط جرمی از رابطه زیر به دست می آید

$$v = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i v_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i v_i}{\rho} \quad 2$$

همچنین سرعت متوسط مولی از رابطه زیر به دست می آید

$$v^* = \frac{\sum_{i=1}^n c_i v_i}{\sum_{i=1}^n c_i} = \frac{\sum_{i=1}^n c_i v_i}{C}$$

3

از روابط فوق نتیجه می‌شود که Cv^* شدت کلی عبور مولها از واحد سطح عمود بر بردار v^* می‌باشد و ρv شدت کلی عبور جرم از واحد سطح عمود بر بردار v خواهد بود.

بطوری که ملاحظه می‌شود، این شدتها توسط یک ناظر در خارج سیستم احساس و اندازه گیری می‌شود

مثلا v همان سرعتی است که توسط لوله پیتوت (pitot tube) اندازه گیری میشود. گاهی سرعت متوسط دیگری نیز با تعریف زیر و بعنوان سرعت متوسط حجمی بکار میرود

$$v^{\bullet} = \sum_{i=1}^n \rho_i v_i \left(\frac{\overline{V}_i}{M_i} \right) = \sum_{i=1}^n C_i v_i \quad \overline{V}_i \quad 4$$

در اینجا n ، تعداد ذرات، حجم مولی جزیی i است، M_i جرم مولکولی و v_i سرعت ماده i می باشد. در مبحث نفوذ می بینیم که نیروی محرکه غلظت با تعریف خاصی از سرعت که همانا سرعت i نسبت به سرعت متوسط مواد می باشد، تناسب دارد

سرعت نسبی جزء I نسبت به سرعت

$$v_i - v = \text{متوسط جرمی}$$

سرعت نسبی جزء I نسبت به سرعت

$$v_i - v^* = \text{متوسط مولی}$$

خلاصه ای از تعاریف سرعت در جدول شماره یک آورده شده است

TABLE 16.1-1
NOTATION FOR CONCENTRATIONS IN BINARY SYSTEMS

Basic definitions	$\rho = \rho_A + \rho_B = \text{mass density of solution (g/cm}^3\text{)}$	(A)
	$\rho_A = c_A M_A = \text{mass concentration of } A \text{ (g of } A/\text{cm}^3 \text{ of solution)}$	(B)
	$\omega_A = \frac{\rho_A}{\rho} = \text{mass fraction of } A$	(C)
	$c = c_A + c_B = \text{molar density of solution (g-moles/cm}^3\text{)}$	(D)
	$c_A = \frac{\rho_A}{M_A} = \text{molar concentration of } A \text{ (g-moles of } A/\text{cm}^3 \text{ of solution)}$	(E)
Additional relations, for reference only	$x_A = \frac{c_A}{c} = \text{mole fraction of } A$	(F)
	$M = \frac{\rho}{c} = \text{number-mean molecular weight of mixture}$	(G)
	$x_A + x_B = 1$	(H)
	$x_A M_A + x_B M_B = M$	(J)
	$\omega_A = \frac{x_A M_A}{x_A M_A + x_B M_B}$	(L)
	$\frac{dx_A}{d\omega_A} = \frac{M_A M_B}{M_A^2 \left(\frac{\omega_A}{M_A} + \frac{\omega_B}{M_B} \right)^2}$	(N)
	$\omega_A + \omega_B = 1$	(I)
	$\frac{\omega_A}{M_A} + \frac{\omega_B}{M_B} = \frac{1}{M}$	(K)
	$\omega_A = \frac{x_A M_A}{x_A M_A + x_B M_B}$	(M)
	$d\omega_A = \frac{M_A M_B dx_A}{(x_A M_A + x_B M_B)^2}$	(O)

TABLE 16.1-2
NOTATION FOR VELOCITIES IN BINARY SYSTEMS

Basic definitions	$v_A = \text{velocity of species } A \text{ relative to stationary coordinates}$	(A)
	$v_A - v = \text{diffusion velocity of species } A \text{ relative to } v$	(B)
	$v_A - v^* = \text{diffusion velocity of species } A \text{ relative to } v^*$	(C)
	$v = \text{mass average velocity} = (1/\rho)(\rho_A v_A + \rho_B v_B) = \omega_A v_A + \omega_B v_B$	(D)
	$v^* = \text{molar average velocity} = (1/c)(c_A v_A + c_B v_B) = x_A v_A + x_B v_B$	(E)
Additional relations	$v - v^* = \omega_A(v_A - v^*) + \omega_B(v_B - v^*)$	(F)
	$v^* - v = x_A(v_A - v) + x_B(v_B - v)$	(G)

TABLE 16.1-3
MASS AND MOLAR FLUXES IN BINARY SYSTEMS

	Quantity	With Respect to Stationary Axes	With Respect to v	With Respect to v^*
Basic definitions	Velocity of species A (cm sec^{-1})	v_A (A)	$v_A - v$ (B)	$v_A - v^*$ (C)
	Mass flux of species A ($\text{g cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$)	$n_A = \rho_A v_A$ (D)	$j_A = \rho_A (v_A - v)$ (E)	$j_A^* = \rho_A (v_A - v^*)$ (F)
	Molar flux of species A ($\text{g-moles cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$)	$N_A = c_A v_A$ (G)	$J_A = c_A (v_A - v)$ (H)	$J_A^* = c_A (v_A - v^*)$ (I)
Relations among the fluxes, for reference only	Sum of mass fluxes ($\text{g cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$)	$n_A + n_B = \rho v$ (J)	$j_A + j_B = 0$ (K)	$j_A^* + j_B^* = \rho(v - v^*)$ (L)
	Sum of molar fluxes ($\text{g-moles cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$)	$N_A + N_B = cv^*$ (M)	$J_A + J_B = c(v^* - v)$ (N)	$J_A^* + J_B^* = 0$ (O)
	Fluxes in terms of n_A and n_B	$N_A = \frac{n_A}{M_A}$ (P)	$j_A = n_A - \omega_A(n_A + n_B)$ (Q)	$j_A^* = n_A - x_A \left(n_A + \frac{M_A}{M_B} n_B \right)$ (R)
	Fluxes in terms of N_A and N_B	$n_A = N_A M_A$ (S)	$J_A = N_A - \omega_A \left(N_A + \frac{M_B}{M_A} N_B \right)$ (T)	$J_A^* = N_A - x_A (N_A + N_B)$ (U)
	Fluxes in terms of j_A and v	$n_A = j_A + \rho_A v$ (V)	$J_A = \frac{j_A}{M_A}$ (W)	$j_A^* = \frac{M}{M_B} j_A$ (X)
	Fluxes in terms of J_A^* and v^*	$N_A = J_A^* + c_A v^*$ (Y)	$J_A = \frac{M_B}{M} J_A^*$ (Z)	$j_A^* = J_A^* M_A$ (AA)

شدت جرمی و مولی

از نظر ناظری که خارج از سیستم قرار دارد
شدت جرمی و مولی عبور ماده i برابر است
با:

شدت عبور جرم i از واحد سطح عمود بر
 v_i در واحد زمان

$$n_i = \rho_i v_i$$

و شدت عبور مول i از واحد سطح عمود
بر V_i در واحد زمان

$$N_i = C_i v_i$$

از نظر ناظری که همراه با سیستم با سرعت v حرکت میکند شدت جرمی و مولی عبور ماده i برابر است با:

شدت عبور جرم i از واحد سطح عمود بر v_i در واحد زمان

$$i_i = \rho_i (v_i - v)$$

شدت عبور مول i از واحد سطح عمود
بر v_i در واحد زمان

$$I_i = C_i(v_i - v)$$

از نظر ناظری که همراه با سیستم با سرعت v^* حرکت میکند شدت جرمی و مولی عبور ماده i برابر است با:

شدت عبور جرم i از واحد سطح عمود بر v_i در واحد زمان

$$j_i = \rho_i (v_i - v^*)$$

شدت عبور مول i از واحد سطح عمود بر
 v_i در واحد زمان

$$J_i = C_i(v_i - v^*)$$

مهمترین این روابط که به سادگی قابل
اثبات است رابطه $N_i = J_i + x_i(N_t)$
میباشد و در این رابطه N_t مجموع
جبری N_i ها است

قانون اول فیک

بر اساس این قانون، شدت مولی نفوذ مولکولی مواد با مشتق مکانی غلظت آنها متناسب است

$$J_A = -c D_{AB} \frac{\partial x_A}{\partial z} \quad 8$$

$$J_i = -c D_{iM} \frac{\partial x_i}{\partial z} \quad 6$$

برای سیستمهای دو جزیی روابط فوق بصورت زیر درمی آیند

$$J_A = -D_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial z} \quad 7$$

$$J_i = -D_{iM} \frac{\partial c_i}{\partial z} \quad 5$$

نفوذ می تواند همزمان در سه جهت صورت گیرد

$$J_i = -D_{iM} \nabla c_i \quad 9$$

$$J_i = -c D_{iM} \nabla x_i \quad 10$$

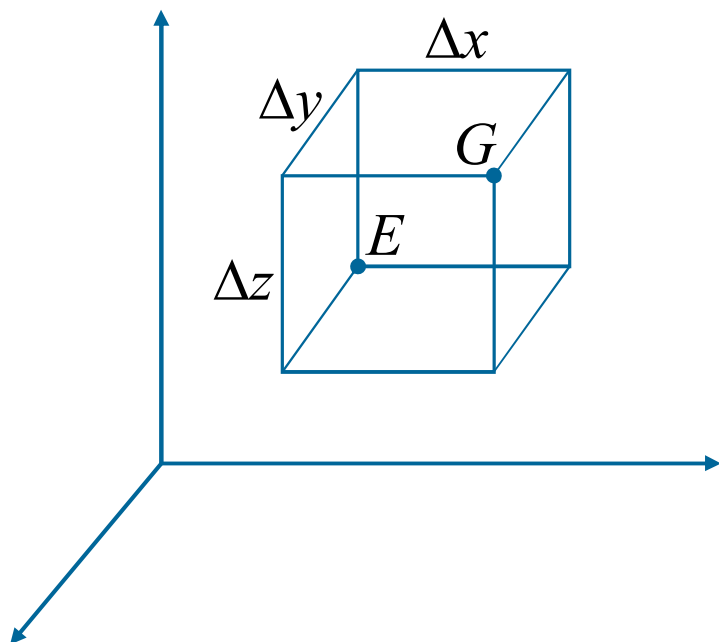
$$J_A = -D_{AB} \nabla c_A \quad 11$$

$$J_A = -c D_{AB} \nabla x_A \quad 12$$

$$\nabla c_i = \frac{\partial c_i}{\partial x} + \frac{\partial c_i}{\partial y} + \frac{\partial c_i}{\partial z} \quad 13$$

نفوذ مولکولی در حالت ناپایدار، قانون دوم فیک

سیستمی را از دو جزء A و B که در آن هیچ گونه عامل حرکت جز نفوذ مولکولی وجود ندارد در نظر بگیرید:



$$E(x, y, z, t)$$

$$G(\Delta x + x, \Delta y + y, \Delta z + z, \Delta t + t)$$

(شدت تولید در داخل المان) + (شدت خروج از المان) - (شدت ورود به المان) = شدت انباشتگی در المان

اگر شدت جریان جرمی جزء A را به درون المان بنویسیم :

$$M_A \cdot R_A \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z : \text{در واحد زمان A شدت جرمی تولید جزء}$$

A شدت انباشتگی جزء : $\frac{\partial M}{\partial \theta} = \frac{\partial(\rho V)}{\partial \theta} = \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial \theta}$

$$\dot{M} = N \cdot A \cdot M_w \Rightarrow$$

X شدت ورود در جهت : $N_{A X} \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot M_A$

X شدت خروج در جهت : $(N_{A X})_{x+\Delta x} \Delta y \cdot \Delta z \cdot M_A$

y شدت ورود در جهت : $N_{A y} \cdot \Delta x \cdot \Delta z \cdot M_A$

y شدت خروج در جهت : $(N_{A y})_{y+\Delta y} \cdot \Delta x \cdot \Delta z \cdot M_A$

Z شدت ورود در جهت : $N_{A Z} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot M_A$

Z شدت خروج در جهت : $(N_{A Z})_{Z+\Delta Z} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot M_A$

(شدت انباشتگی + شدت ورود - شدت خروج = شدت تولید)

اگر پارامتر های نوشته شده را در معادله اصلی جا گذاری نمائیم :

$$M_A \left\{ [(N_{AX})_{X+\Delta X} - (N_{AX})] \Delta y \cdot \Delta z + [(N_{Ay})_{y+\Delta y} - (N_{Ay})] \Delta x \cdot \Delta z + [(N_{AZ})_{Z+\Delta Z} - (N_{AZ})] \Delta x \cdot \Delta y \right\} + \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho_A}{\partial \theta} = M_A R_A \Delta x \Delta y \Delta z$$

اگر معادله فوق را بر Δx , Δy , Δz تقسیم کرده حد آن را برای حالتی که Δx و Δy و Δz به سمت صفر میل میکند تعیین نماییم در این صورت خواهیم داشت:

$$**M_A \left(\frac{\partial N_{AX}}{\partial x} + \frac{\partial N_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial N_{Az}}{\partial z} \right) + \frac{\partial \rho_A}{\partial \theta} = M_A R_A$$

به همین ترتیب برای جزء B می توان نوشت:

$$M_B \left(\frac{\partial N_{Bx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{By}}{\partial y} + \frac{\partial N_{Bz}}{\partial z} \right) + \frac{\partial \rho_B}{\partial \theta} = M_B R_B$$

و از جمع جبری دو معادله بالا می توان نوشت:

$$\frac{\partial(M_A N_A + M_B N_B)x}{\partial x} + \frac{\partial(M_A N_A + M_B N_B)y}{\partial y} + \frac{\partial(M_A N_A + M_B N_B)z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0$$

توجه:

$$M_A R_A = -M_B R_B$$

$$\rho_A + \rho_B = \rho$$

$$M_A N_{Ax} = u_x \rho_A + M_A J_{Ax}$$

در اینجا U_x سرعت متوسط جرمی در جهت Xها بوده و از رابطه زیر بدست می آید:

$$\rho u_x = u_{Ax} \rho_A + u_{Bx} \rho_B = M_A N_{Ax} + M_B N_{Bx}$$

بنابراین:

$$\frac{\partial}{\partial x}(M_A N_A + M_B N_B)_x = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) = \rho \frac{\partial u_x}{\partial x} + (u_x) \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

و همین طور:

$$\frac{\partial}{\partial y}(M_A N_A + M_B N_B)_y = \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) = \rho \frac{\partial u_y}{\partial y} + (u_y) \frac{\partial \rho}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(M_A N_A + M_B N_B)_z = \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = \rho \frac{\partial u_z}{\partial z} + (u_z) \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

و در نتیجه:

$$\rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + u_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0$$

معادله فوق معادله پیوستگی برای کل مواد است. در حالتی که جرم ویژه محلول ثابت باشد خواهیم

داشت :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

برای یافتن معادله پیوستگی جزء A می توان نوشت:

$$M_A \cdot N_{Ax} = u_x P_A + M_A J_{Ax}$$

$$M_A \frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} = u_x \frac{\partial \rho_A}{\partial x} + \rho_A \frac{\partial u_x}{\partial x} + M_A \frac{\partial J_{Ax}}{\partial x} = u_x \frac{\partial P_A}{\partial x} + P_A \frac{\partial u_x}{\partial x} - M_A D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2}$$

که اگر این مقادیر را در معادله ** جایگزین کنیم خواهیم داشت:

$$u_x \frac{\partial \rho_A}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho_A}{\partial y} + u_z \frac{\partial \rho_A}{\partial z} + \rho_A \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - M_A D_{AB} \left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \rho_A}{\partial \theta} = M_A R_A$$

0

معادله پیوستگی

پس از تقسیم طرفین بر M_A خواهیم داشت:

$$\frac{\rho_A}{M_A} = C_A \rightarrow u_x \frac{\partial C_A}{\partial x} + u_y \frac{\partial C_A}{\partial y} + u_z \frac{\partial C_A}{\partial z} + \frac{\partial C_A}{\partial \theta} = D_{AB} \left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right) + R_A$$

در حالت خاصی که سرعت برابر صفر باشد و واکنش شیمیایی نیز نداشته باشد:

$$\frac{\partial C_A}{\partial \theta} = D_{AB} \left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right) = D_{AB} \nabla^2 C_A$$

این معادله اکثراً در مورد انتقال جرم در جامدات به کار می رود ولی در بعضی حالات خاص برای محاسبه انتقال جرم در سیالات نیز قابل استفاده است.