

بررسی انتقال جرم در خارج کره صلب در شرایط
یکنواخت_ محیط اطراف کاملاً ساکن است.

کره‌ای به شعاع R در نظر بگیرید. انتقال جرم از کره به اطراف صورت میگیرد.

__ کره میتواند، کره جامد یا کره سیال صلب (همچون جامد) باشد.

__ شرایط عملیاتی دما و فشار ثابت است.

__ سیستم را دو جزئی در نظر گرفتیم. (برای سادگی کار)

__ فقط انتقال جرم از کره به اطراف صورت میگیرد

انتقال جرم را فقط در جهت شعاع در نظر میگیریم.

$$N_{Ar} = J_{Ar} + x_A (N_{Ar} + N_{Br})$$

$$N_{Br} = 0$$

فرض، غلظت کل ثابت است.

$$N_{Ar} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dr} + x_A N_{Ar}$$

$$N_{Ar} = -\frac{D_{AB}}{1-x_A} \frac{dC_A}{dr} = -\frac{D_{AB} C}{C-C_A} \frac{dC_A}{dr}$$

$$x_A = \frac{C_A}{C}$$

N Ar فلاکس جزء A متغیر اما دبی انتقال جرم ثابت و برابر است با:

$$m_A = N_{Ar} S_r M_A \Big|_{r \geq R} = \text{ثابت}, \quad S_r = 4\pi r^2$$

$$= -\frac{D_{AB} C}{C - C_A} 4\pi r^2 M_A \frac{dC_A}{dr}$$

$$m_A \frac{dr}{r^2} = -\frac{D_{AB} C}{C - C_A} 4\pi M_A dC_A$$

بررسی شرایط مرزی: (BCs)

$$r = R, \quad C_A = C_{AS} = C_A^* \quad (\text{BC1}) \quad \text{غلظت روی سطح:}$$

$$r = r \ (r > R), \quad C_A = C_A \quad (\text{BC2}) \quad \text{غلظت در نقطه‌ای به فاصله } r \text{ از مرکز کره:}$$

با اعمال شرایط مرزی:

$$m_A = \frac{4\pi D_{AB} C M_A r R}{r - R} \ln \frac{C - C_A}{C - C_{AS}}$$

رابطه فوق، دبی جرمی از کره‌ای به شعاع R به نقطه‌های به فاصله r از مرکز کره را میدهد.

رابطه $m_A = N_{Ar} S_r M_A \Big|_{r \geq R} = \text{cte}$ در حالت یکنواخت، بدون هیچ واکنش شیمیایی:

$$N_{Ar} S_r M_A \Big|_r - N_{Ar} S_r M_A \Big|_{r+\Delta r} = 0$$

$$S_R = 4\pi r^2$$

$$-\frac{d(N_{Ar} r^2)}{dr} = 0 \quad \text{یا} \quad N_{Ar} r^2 = \text{cte}$$

$$N_{Ar} 4\pi r^2 M_A \Big|_{r \geq R} = \text{ثابت} = m_A$$

مثال: انتقال جرم از کره‌ای به شعاع R به نقطه‌ای به فاصله R ۲۰ از مرکز کره صورت می‌گیرد. مطلوبست مقدار عددی عدد

شروود (طبق تعریف عدد شروود (Sh) برابر است با $Sh = \frac{Fd}{CD_{AB}}$ و $F = K_C C_{B,M}$ که $C_{B,M}$ متوسط لگاریتمی غلظت جزء B در مرز ۱ و ۲، $C_{B,M} = \frac{C_{B2} - C_{B1}}{\ln \frac{C_{B2}}{C_{B1}}}$ و قطر کره است. در خصوص عدد شروود بعداً بیشتر بررسی خواهیم نمود.)
در خارج کره - تمامی فرضیات لازم نوشته شود.

حل: با توجه به روابط روابط فوق الذکر و تمامی فرضیات ذکر شده داریم:

$$\dot{m}_A = N_{Ar} S_r M_A \quad r \geq R = \frac{4\pi M_A D_{AB} C r R}{r-R} \ln \frac{C-C_A}{C-C_{AS}}$$

از طرفی مقدار رفلکس جرم از سطح کره به محیط اطراف را بصورت حاصلضرب k_c (ضریب انتقال جرم) در نیروی محرکه ΔC نیز می‌توان تعریف کرد.

فلکس جرم از سطح کره به محیط اطراف

$$N_{Ar} \quad r=R = k_c \Delta C = k_c (C_{AS} - C_A)$$

$$\dot{m}_A \quad r=R = N_{Ar} S M_A \quad r=R = k_c (C_{AS} - C_A) 4\pi R^2 M_A$$

از تساوی دو رابطه فوق:

$$\frac{4\pi M_A D_{AB} C r R}{r-R} \ln \frac{C-C_A}{C-C_{AS}} = k_c (C_{AS} - C_A) 4\pi R^2 M_A$$

$$C_A + C_B = C_{AS} + C_{BS} = C = \text{غلظت کل}$$

$$-\frac{4\pi M_A D_{AB} C r R}{r-R} \ln \frac{C-C_A}{C-C_{AS}} = 4\pi \rho_A R^2 \frac{dR}{d\theta}$$

$$r \geq R, \quad 0 \leq \theta \leq \theta, \quad R_{\text{اولیه}} \leq R \leq R_\theta$$

$$\theta = \frac{\rho_A}{D_{AB} C M_A \ln \frac{C-C_A}{C-C_{AS}}} \left[\frac{1}{2} (R^2 - R_\theta^2) - \frac{1}{3r} (R^3 - R_\theta^3) \right]$$

این رابطه زمان لازم برای تغییر شعاع از R به R_θ وقتی انتقال جرم در شرایط یکنواخت و از سطح کره به نقطه‌ای به فاصله r از مرکز کره صورت می‌گیرد را نشان می‌دهد

مثال: قطره آبی به قطر ۰.۱ اینچ را در فضای ساکن هوا و در دمای 80°F و فشار اتمسفر و با مقدار رطوبت ۰.۰۱۰۳۶ اتمسفر در نظر بگیرید. چه مدت طول می‌کشد تا قطره آب تبخیر شود.

آب: A هوا: B

$$R_\theta = 0, \quad r \gg R, \quad C = \frac{P_t}{RT}, \quad C_A = \frac{P_A}{RT}$$

حل:

$$N_{Br} = 0, \quad 2R = 0.1 \text{ اینچ}$$

$$\text{این رابطه برای حالت } r \gg R \text{ به صورت زیر ساده می‌شود:}$$

$$= \frac{\rho_A}{D_{AB} C M_A \ln \frac{C-C_A}{C-C_{AS}}} \left[\frac{1}{2} (R^2 - R_\theta^2) - \frac{1}{3r} (R^3 - R_\theta^3) \right] \theta$$

$$\theta = \frac{\rho_A R^2}{2 D_{AB} C M_A \ln \frac{C-C_A}{C-C_{AS}}}$$

به لحاظ تبخیر آب و کاهش دمای آن به دمای بالاتر (با استفاده از منحنی رطوبت، دمای سطح $T = 60^\circ \text{F}$) لذا:

$$P_{AS} = \text{فشار بخار در دمای سطح } (T = 60^\circ \text{F}) = 0.01743 \text{ atm}$$

ضریب نفوذ در دمای متوسط لایه $(\frac{60+80}{2} = 70^\circ \text{F})$ بدست می‌آید.

$$D_{AB} (T=70^\circ \text{F}) = D_{H_2O-Air} = 1.01 \frac{ft^2}{hr}$$

$$\rho_A = 62.43 \frac{lb}{ft^3}, \quad C = \frac{P_t}{RT} = \frac{(1)}{(0.73)(460+70)}$$

بنابراین:

$$\theta = \frac{(62.43)(0.73)(\frac{0.05}{12})(460+70)}{(2)(1.01)(1)(18)(\frac{1-0.01036}{1-0.01743})} = 1.61 hr$$

مثال: اطراف یک قطعه جامد کاتالیستی کروی با لایهء گازی پوشیده شده است. این لایهء گازی همچون یک تیغهء کروی یا قطر داخلی r_1 و قطر خارجی r_2 می باشد. مطلوبست:

الف: تغییرات غلظت جزء A که از درون تیغه کروی از سطح ۱ به ۲ در شرایط یکنواخت در حال انتقال می باشد.

ب: دبی انتقال جرم را در تیغه بدست آورید.

ج: اگر تیغه کروی به صورت غیرایزوترم عمل نماید به طوری که رابطه $\left(\frac{r}{r_1}\right) \frac{T}{T_1} =$ در تیغه حاکم باشد، دبی انتقال جرم در این حالت چقدر خواهد بود؟

حل: لایه انتقال جرم گازی است. از حرکت توده ای درون لایه صرف نظر نمی کنیم.

$$N_{Ar} = J_{Ar} + x_A (N_{Ar} + N_{Br})$$

$$N_{Br} = 0, \quad N_{Ar} = -\frac{D_{AB}}{z} \frac{dC_A}{dz} + x_A N_{Ar}$$

$$N_{Ar} = -C D_{AB} \frac{1}{1-x_A} \frac{dx_A}{dr}$$

واکنش شیمیایی در لایه گازی نداریم و شرایط یکنواخت است.

$$N_{Ar} S|_r - N_{Ar} S|_{r+\Delta r} = 0, \quad S = 4\pi r^2$$

$$\frac{d}{dr} (r^2 N_{Ar}) = 0$$

$$\frac{d}{dr} \left(-r^2 \frac{C D_{AB}}{1-x_A} \frac{dx_A}{dr} \right) = 0$$

$$\left[\frac{x_{B1}}{x_{B2}} \right] = \left[\frac{x_{B2}}{x_{B1}} \right] \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

تغییرات غلظت در لایه

ب:

$$\dot{m}_A = M_A N_{Ar} S_{r \geq r_1} = M_A N_{Ar} 4\pi r_1^2 \Big|_{r=r_1}$$

$$N_{Ar} \Big|_{r=r_1} = -CD_{AB} \frac{1}{1-X_A} \frac{dX_A}{dr} \Big|_{r=r_1}$$

از تغییرت غلظت بر حسب r ، مقدار $\frac{dX_A}{dr}$ را در نقطه $r = r_1$ بدست آورده و در رابطه فوق قرار می‌دهیم.

$$\dot{m}_A = \frac{4\pi CD_{AB} M_A}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \ln \frac{X_{B2}}{X_{B1}}$$

رابطه فوق به راحتی از رابطه زیر قابل دستیابی است.

$$\dot{m}_A = N_{Ar} \bar{S}_{av} M_A$$

$$N_{Br} = 0, \quad N_{Ar} = \frac{N_{Ar}}{N_{Ar} + N_{Br}} \frac{D_{AB} C}{\delta} \ln \frac{\frac{N_{Ar}}{N_{Ar} + N_{Br}} - X_{A2}}{\frac{N_{Ar}}{N_{Ar} + N_{Br}} - X_{A1}}$$

$$\delta = r_2 - r_1$$

$$N_{Ar} = \frac{D_{AB} C}{r_2 - r_1} \ln \frac{1 - X_{A2}}{1 - X_{A1}}$$

$$N_{Ar} = \frac{D_{AB} C}{r_2 - r_1} \ln \frac{1 - X_{B2}}{1 - X_{B1}}$$

$$\bar{S}_{av} = 4\pi r^2 = 4\pi r_1 r_2$$

$$\dot{m}_A = \frac{4\pi r_1 r_2 CD_{AB} M_A}{r_2 - r_1} \ln \frac{X_{B2}}{X_{B1}}$$

ج: در صورت غیر ایزو ترم بودن لایه، با توجه به رابطه ضرایب نفوذ با دما در گازها داریم:

$$\frac{D_{AB}}{D_{AB1}} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{CD_{AB1}}{1-X_A} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dX_A}{dr} \right) = 0$$

$$\dot{m}_A = 4\pi r_1^2 M_A N_{Ar} \big|_{r=r_1} = \frac{4\pi \left(\frac{PD_{AB}}{RT_1}\right) \left(1+\frac{n}{2}\right)}{r_1^{-1\frac{n}{2}} - r_2^{-1\frac{n}{2}}(r_1)^{\frac{n}{2}}} \ln \frac{X_{B2}}{X_{B1}}$$