

تشابهات موجود بین پدیده های
انتقال جرم، حرارت و مقدار حرکت

در حرکت آرام دو بعدی یک سیال از روی یک سطح جامد ، معادله دیفرانسیل حرکت (معادله ناویر

استوکس) در جهت X ها:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right)$$

اگر در چنین سیستمی جزء A بین سطح جامد و سیال انتقال یابد؛ معادله دیفرانسیل توزیع غلظت این جزء در سیال بدون وجود واکنش شیمیایی به قرار زیر خواهد بود:

$$u_x \frac{\partial C_A}{\partial x} + u_z \frac{\partial C_A}{\partial z} = D_{AB} \left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right)$$

به علاوه چنانچه انتقال حرارت نیز بین صفحه و سیال صورت گیرد، معادله دیفرانسیل درجه حرارت

سیال عبارت خواهد بود از :

$$u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

ملاحظه می شود که هر سه معادله شکل واحدی دارند و تفاوت ظاهری بین آنها از آن جهت است که U_X ، C_A و T و همچنین ضرایب نفوذ مقدار حرکت v ، جرم D_{AB} و حرارت α جایگزین یکدیگر شده اند.

متغیرهای سرعت و غلظت و حرارت را می توان به صورت بدون بعد نمایش داد.

$$\frac{u_x - (u_{x,z=0} = 0)}{u_0 - (u_{x,z=0} = 0)} = \frac{u_x}{u_0}$$

سرعت بدون بعد :

$$\frac{C_A - C_{Ai}}{C_{A_0} - C_{Ai}}$$

غلظت بدون بعد :

$$\frac{T - T_i}{T_0 - T_i}$$

دمای بدون بعد :

مزیت بدون بعد کردن متغیرهای فوق در این است که با تعریف متغیرهای جدید شرایط مرزی معادلات فوق نیز شبیه یکدیگر می شود. مثلاً برای شکل صفحه قبل متغیرهای بدون بعد سرعت ، غلظت و درجه حرارت در فصل مشترک سیال با صفحه ($Z=0$) همگی برابر با صفر و در نقاط بسیار دور از سطح صفحه ($Z=\infty$) همگی برابر با یک می باشد.

در صورت برابری ضرایب نفوذ انتقال $Pr=Sc=1$ ، توزیع متغیرهای بدون بعد عیناً معادل یکدیگر خواهد بود.

$$N_A = -D_{AB} \left(\frac{\partial C_A}{\partial Z} \right)_{Z=0} = K_L (C_{A_i} - C_{A_0})$$

$$q = -\alpha \left[\frac{\partial (\rho C_P T)}{\partial Z} \right]_{Z=0} = h(T_i - T_0)$$

$$\tau_i g_c = \nu \left[\frac{\partial (\rho u_x)}{\partial z} \right]_{Z=0} = \frac{f}{2} u_0 (\rho u_0 - 0)$$

f = ضریب بدون بعد اصطکاک

$f \cdot u_0 / 2$ = ضریب انتقال مقدار حرکت

حرکت درهم درون لوله های
مدور

$$St_m = \frac{Nu_m}{Re \cdot Pr} = \frac{h_m}{c_p \bar{u}_x \rho}$$

رابطه فوق به جز در مواردی که Pr برابر يك است توافق نزدیکی با نتایج آزمایشی ندارد.

با آزمایشی که توسط کولبورن (Colburn) انجام گرفت به رابطه شکل زیر تعمیم یافت :

$$St_m = \frac{h_m}{C_p \bar{u}_x \rho} = \frac{0.5 f}{Pr^{2/3}}$$

که این رابطه که تشابه بین انتقال مقدار حرکت و انتقال حرارت را نشان می دهد به نام **تشابه کولبورن** معروف است.

چنانچه گروه بدون بعد بالا را برابر J_H فرض کنیم:

$$St_m \cdot Pr^{2/3} = \frac{h_m}{c_p \bar{u}_x \rho} Pr^{2/3} = J_H = \frac{1}{2} f = \psi(Re)$$

با استفاده از رابطه فوق می توان رابطه مشابهی برای انتقال جرم نوشت. این تشابه به نام « تشابه چیلتون کولبورن» (Chilton-Colburn) معروف است.

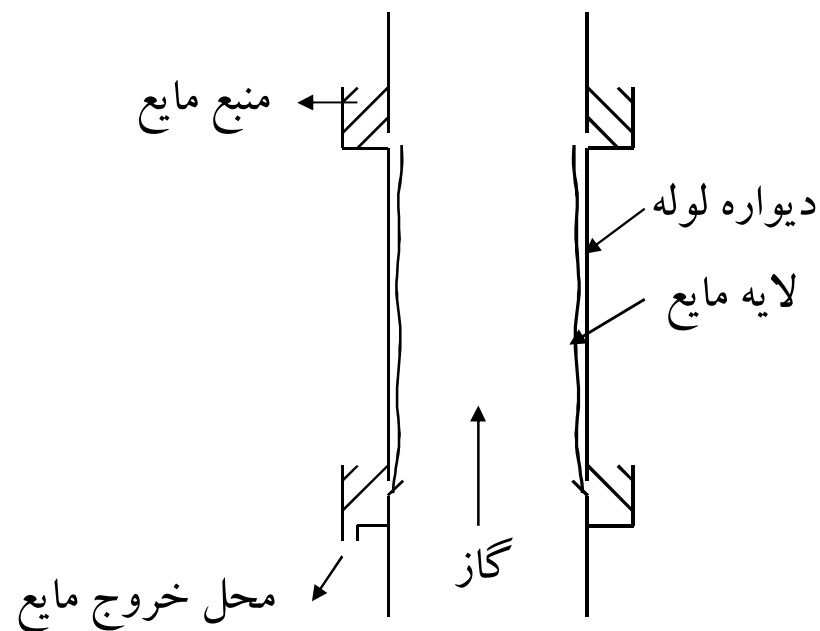
$$St_m \cdot Sc^{2/3} = \frac{sh_m}{Re \cdot Sc} Sc^{2/3} = \frac{F_m}{C \bar{u}_x} Sc^{2/3} = J_D = \frac{1}{2} f = \psi(Re)$$

ضریب اصطکاک در داخل لوله

$$5000 < Re < 200000 \Rightarrow \frac{1}{2} f = 0.023 Re^{-0.2}$$

:

برج‌های جدا‌ره مرطوب



برج جداره مرطوب

مایع فرار خالصی از دیواره های داخلی یک استوانه به سمت پایین در حرکت است در حالی که گازی در مرکز لوله از پایین به سمت بالا جریان دارد. با اندازه گیری میزان تبخیر مایع در گاز و دانستن اندازه سطحی که انتقال جرم از آن صورت می گیرد. ضرایب انتقال جرم در فاز گاز محاسبه می شود. با تغییر دادن نوع مایع و گاز می توان ضریب انتقال جرم را بدست آورد.

مثال: می خواهیم ضریب انتقال جرم را برای تبخیر آب از سطح مرطوب جسمی که دارای شکل هندسی خاصی بوده و گاز هیدروژن از روی آن عبور می کند تعیین نماییم. سرعت ظاهری هیدروژن هنگام عبور از روی جسم 50 ft/Sec ، فشار برابر جو و درجه حرارت 100°F است. برای این سیستم نتایج تجربی در دسترس نیست ولی در شرایط ذکر شده ضریب انتقال حرارت بین سطح جسم مزبور و هوا از رابطه تجربی زیر قابل محاسبه است.

$$h = 0.072 G'^{0.6} \frac{lb_m}{hr \cdot ft^2}$$

G' : سرعت جرمی بر حسب

با استفاده از رابطه اخیر ضریب انتقال جرم را برای شرایط مشابه تعیین

کنید. خواص فیزیکی مورد نیاز در 100°F و فشار جو به قرار زیر است.

نام	$\mu: Cp$	$\rho: \frac{lb_m}{ft^3}$	$C_p: \frac{BTU}{lb_m \cdot f}$	$D_{AB}: \frac{ft^2}{hr}$	$K: \frac{BTU}{ft \cdot f}$
هوا	0.0185	0.071	0.24	3	0.01576
هیدروژن	0.009	0.00495	3.45		0.1069

حل:

$$J_H = \frac{h_m}{c_p u \rho} \text{Pr}^{2/3} = \frac{h}{c_p G'} \text{Pr}^{2/3} = \psi(\text{Re})$$

داشتیم:

تابع $\Psi(\text{Re})$ باید طوری تعیین شود که با گروه $0.072 G'^{0.6}$ هماهنگ باشد.

$$\psi(\text{Re}) = b \text{Re}^n$$

$$\text{Re} = \frac{\rho \cdot u \cdot d}{\mu} = \frac{G' \cdot L}{\mu}$$

$$\frac{h}{c_p G'} \text{Pr}^{2/3} = \psi(\text{Re}) = b \text{Re}^n \quad \Rightarrow \quad h = \frac{c_p G'}{\text{Pr}^{2/3}} b \text{Re}^n \quad \Rightarrow$$

$$h = \frac{b \cdot c_p}{\text{Pr}^{2/3}} G' \left(\frac{G' L}{\mu} \right)^n = \frac{b c_p}{\text{Pr}^{2/3}} \left(\frac{L}{\mu} \right)^n \cdot G'^{n+1}$$

$$\Rightarrow n+1=0.6 \rightarrow n=-0.4$$

$$h = 0.072 G'^{0.6}$$

$$\frac{b c_p}{\text{Pr}^{2/3}} \left(\frac{L}{\mu} \right)^{-0.4} = 0.072 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{0.072 \text{Pr}^{2/3}}{c_p} \left(\frac{L}{\mu} \right)^{0.4}$$

$$1 c_p = 2.419 \frac{lb_m}{ft.hr} \quad \Rightarrow \quad \text{Pr} = \frac{c_p \mu}{K} = \frac{0.24 (0.0185) (2.42)}{0.01576} = 0.681$$

$$b = \frac{0.072 (0.681)^{2/3}}{0.24} \left(\frac{L}{0.0185 (2.42)} \right)^{0.4} = 0.810 L^{0.4}$$

$$J_H = \frac{h}{c_p G'} \text{Pr}^{2/3} = b \text{Re}^n = 0.810 L^{0.4} \text{Re}^{-0.4} = \frac{0.810 L^{0.4}}{\text{Re}^{0.4}} = \psi(\text{Re})$$

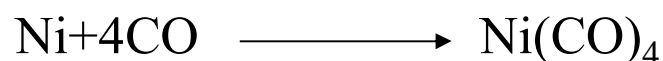
$$J_H = J_D \Rightarrow J_H = J_D = \frac{K_G P_{BM} M_M}{\rho u} Sc^{2/3} = \frac{0.810 L^{0.4}}{Re^{0.4}} = \psi(Re)$$

$$K_G P_{BM} = F = \frac{0.810 L^{0.4} \rho u}{Re^{0.4} M_M Sc^{2/3}} = \frac{0.810 (\rho u) L^{0.4}}{\left(\frac{\rho u L}{\mu} \right)^{0.4} M_M Sc^{2/3}} = \frac{0.810 (\rho u)^{0.6} \mu^{0.4}}{M_M Sc^{2/3}}$$

$$Sc = \frac{0.009(2.42)}{(0.00495)(3)} = 1.468$$

$$F = K_G P_{BM} = \frac{0.810 \left((0.00495) \left(50 \times \frac{3600 \text{ sec}}{\text{hr}} \right)^{0.6} ((0.009)(2.42))^{0.4} \right)}{(2.02) (1.468)^{2/3}} = 3.98 \frac{\text{lbmol}}{\text{hr} \cdot \text{ft}^2}$$

مثال: برای درست کردن Ni(CO)_4 گاز CO از درون بستری از گلوله های که روی نیکل ، قطر 0.5 فوت عبور داده می شود سطح مقطع بستر یک فوت مربع و فضای خالی آن 30 درصد حجم بستر است گاز CO خالص در 50 درجه سانتی گراد و فشار یک جو با شدت 15 lbmol/hr از بالای بستر وارد می شود.



در شرایط موجود می توان فرضیات زیر را صادق دانست:

1- واکنش شیمیایی بسیار سریع انجام می گیرد، به طوری که می توان غلظت را در سطح نیکل همواره برابر با صفر فرض کرد. کربنیل بدست آمده به صورت گاز است و به محض تشکیل شدن به سمت توده گازی درون بستر جریان دارد ، نفوذ می کند. بدین ترتیب شدت واکنش با توجه به شدت انتقال CO به سطح نیکل و انتقال Ni(CO)_4 از سطح نیکل به توده گاز کنترل می شود.

2- درجه حرارت و فشار در همه نقاط ثابت و به ترتیب برابر 50 درجه سانتی گراد و یک جو است.

3- گرانی گاز برای تمام نقاط برابر با 0.024 Cp و عدد اشمیت در تمام نقاط داخل بستر برابر با 2 می باشد.

4- اندازه گلوله های نیکل تغییر محسوسی نمی نماید.

با توجه به فرضیات فوق ارتفاع بستری را که بتواند غلظت CO را در گاز خروجی به 0.5 درصد کاهش دهد پیدا نمایید.

گاز A = CO $\Rightarrow$ $N_B = -\frac{N_A}{4}$ حل:

گاز B = $\text{Ni}(\text{CO})_4$

$$\frac{N_A}{N_A + N_B} = \frac{N_A}{N_A - \frac{N_A}{4}} = \frac{N_A}{\frac{3}{4}N_A} = \frac{4}{3}$$

$$N_A = \frac{4}{3} F \ln \frac{4/3 - 0}{4/3 - y_A} = \frac{4}{3} F \ln \frac{4}{4 - 3 y_A} \quad \frac{lbmol}{hr.ft^2}$$

فرض می‌کنیم شدت جریان مولی گاز در نقطه‌ای که فاصله‌اش از بالای بستر z است برابر با $G y_A$ از سطح مقطع بستر باشد. در این صورت شدت جریان گاز CO در این نقطه برابر $G y_A$ خواهد بود. اگر سطح ویژه گلوله‌های نیکل برابر $\frac{lbmol}{hr.ft^2}$ بستر باشد مجموعه سطوح گلوله‌های نیکل که در عنصر هندسی فوق وجود دارند برابر با $a dz$ خواهد بود. هرگونه تغییر غلظت جز A در این عنصر هندسی به خاطر وجود شار N_A ایجاد می‌شود به طوری که می‌توان نوشت:

$$d(y_A \cdot G) = -N_A \cdot a \cdot dz$$

$$N_A = -\frac{d(y_A \cdot G)}{a \cdot dz}$$

به ازای هر مول CO که مصرف می شود یک چهارم مول Ni(CO)_4 بوجود می آید.

در نتیجه به ازای هر مول CO که ترکیب می شود سه چهارم مول از تعداد مولهای گاز موجود در بستر کم می شود. چنانچه G_0 شدت مولی جریان CO هنگام ورود به بستر باشد تعداد مولهای CO که در طول فاصله ای برابر با z از بالای بستر ترکیب شده و از بین رفته است برابر $\frac{4}{3}(G_0 - G)$ و شدت جریان CO در این نقطه برابر با $\left[G_0 - \frac{4}{3}(G_0 - G) \right]$ می باشد بنابراین در این نقطه :

$$y_A = \frac{G_0 - \frac{4}{3}(G_0 - G)}{G} \quad \Rightarrow \quad G y_A = G_0 - \frac{4}{3}G_0 + \frac{4}{3}G \quad \Rightarrow$$

$$G (y_A - \frac{4}{3}) = G_0(1 - \frac{4}{3}) \quad \Rightarrow \quad G (y_A - \frac{4}{3}) = -\frac{G_0}{3} \quad \Rightarrow$$

$$G \left(\frac{4}{3} - y_A \right) = \frac{G_0}{3} \quad \Rightarrow \quad G = \frac{\frac{G_0}{3}}{\frac{4}{3} - y_A} \quad \Rightarrow$$

$$G = \frac{G_0}{4 - 3y_A} \quad \Rightarrow \quad G y_A = \frac{G_0 y_A}{4 - 3y_A} \quad \Rightarrow$$

$$d(G y_A) = d\left(\frac{G_0 y_A}{4 - 3y_A}\right) \quad \Rightarrow$$

$$d(G y_A) = \frac{d y_A G_0 (4 - 3y_A) - (-3 G_0 y_A) d y_A}{(4 - 3y_A)^2} = \frac{4 G_0 d y_A}{(4 - 3y_A)^2}$$

داشتیم :

$$N_A = -\frac{d(y_A G)}{a \, dz} \quad \& \quad N_A = \frac{4}{3} F \ln \frac{4}{4-3y_A}$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d(y_A G)}{a \, dz} &= \frac{4}{3} F \ln \frac{4}{4-3y_A} \\ d(G y_A) &= \frac{4 G_0 d y_A}{(4-3y_A)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\frac{4 G_0 d y_A}{(4-3y_A)^2 a \, dz} = \frac{4}{3} F \ln \frac{4}{4-3y_A}$$

ضریب انتقال جرم F که خود تابعی از y_A است را می توان از جدول 3-3 بدست آورد (ردیف پنجم)

ابتدا باید عدد رینولدز را محاسبه نمود و برای این کار نیاز به محاسبه G' (یعنی شدت جریان جرمی گاز در مقطع بستر خواهد بود) یا به عبارتی شار جرمی $G' \frac{lbmol}{hr.ft^2}$ ، پس ابتدا ضروری است که از روی شار مولی موجود و جرم مولکولی هر یک از گاز ها شار جرمی را محاسبه نمائیم. شار جرمی CO برابر خواهد بود با:

$$28[G_0 - \frac{4}{3}(G_0 - G)]$$

و شدت جریان جرمی (شار جرمی) $Ni(CO)_4$ برابر با $170.7[G_0 - \frac{1}{3}(G_0 - G)]$ می باشد. در نتیجه شدت جریان جرمی گاز:

$$G' = (47.6G_0 - 19.6G) \frac{lbm}{hr.ft^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} G' = 47.6G_0 - 19.6G \\ G = \frac{G_0}{4-3y_A} \end{array} \right\} \Rightarrow G' = 47.6G_0 - \frac{19.6G_0}{4-3y_A} = G_0 \left(47.6 - \frac{19.6}{4-3y_A} \right)$$

برای گلوله های نیکل به قطر 0.5" یا $d_p = 0.0416'$ است ($0.5"/12 = 0.0416'$)

$$Re'' = \frac{G' \cdot d_p}{\mu} = 0.0416 G_0 \left(\frac{47.6 - 19.6 / (4-3y_A)}{(0.024)(2.42)} \right) = G_0 \left(34.2 - \frac{14.06}{4-3y_A} \right)$$

به علت اینکه y_A از بالا تا پایین بستر بین 1 و 0.005 تغییر می کند و $G_0 = 15 \frac{lbmol}{hr.ft^2}$ است

$$\text{If } y_A=1 \quad \Rightarrow \quad Re''=302$$

$$\text{If } y_A=0.005 \quad \Rightarrow \quad Re''=416$$

پس مطابق جدول 3-3 خواهیم داشت:

$$J_D = \frac{F}{G} Sc^{2/3} = \frac{2.06}{\varepsilon} Re''^{-0.575}$$

از آنجایی که $sc = 2$ و $\varepsilon = 3/0$ می باشد ضریب انتقال جرم F برابر خواهد بود با

$$J_D = \frac{F}{G} Sc^{2/3} = \frac{2.06}{\varepsilon} Re''^{-0.575} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{2.06G}{\varepsilon Sc^{2/3}} Re''^{-0.575}$$

$$\text{Re}'' = G_0 \left(34.2 - \frac{14.06}{4-3y_A} \right) \Rightarrow F = \frac{2.06}{0.3 (2)^{2/3}} \left(\frac{G_0}{4-3y_A} \right) [G_0 (34.2 - \frac{14.06}{4-3y_A})]^{-0.575}$$

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{136.67}{4-3y_A} [34.2 - \frac{14.06}{4-3y_A}]^{-0.575} \\ \text{از طرفی داشتیم} \quad -\frac{4G_0 dy_A}{(4-3y_A)^2 a dz} &= \frac{4}{3} F \ln \frac{4}{4-3y_A} \\ a &= \frac{6(1-\varepsilon)}{d_p} = \frac{6(1-0.3)}{0.0416} = 101 \text{ ft}^2 / \text{ft}^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$-\frac{4 \times 15}{101 (4-3y_A)^2} dy_A = \frac{4}{3} \frac{136.67}{4-3y_A} [34.2 - \frac{14.06}{4-3y_A}]^{-0.575} \ln \frac{4}{4-3y_A} \Rightarrow$$

$$\frac{d y_A}{(4-3 y_A) dz} = 30.68 \left[34.2 - \frac{14.06}{4-3 y_A} \right]^{-0.575} \ln \frac{4}{4-3 y_A}$$

$$z = \int_0^z dz = -0.0325 \int_1^{0.005} \frac{[34.2 - 14.06 / (4-3 y_A)]^{-0.575}}{(4-3 y_A) \ln 4 / (4-3 y_A)} dy_A$$

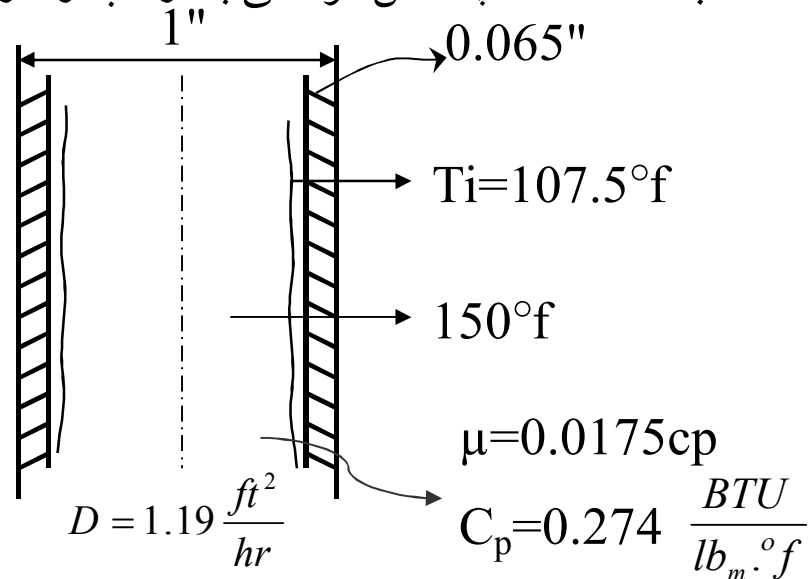
مقدار انتگرال فوق را باید به طریقه ترسیمی معین کرد با رسم کردن منحنی آن بر حسب y_A و تعیین مساحت زیر منحنی در فاصله 0.005 تا 1 ارتفاع بستر برابر با 0.475 فوت حاصل می شود. بنابراین برای اینکه غلظت CO در گاز خروجی از بستر به 0.5% کاهش یابد باید بستری که ارتفاع آن حدود 6 اینچ است استفاده نمود.

مثال : مخلوطی از هوا و بخار آب در لوله قائم مسی به نظر خارجی 1" به سمت بالا در حرکت است.

ضخامت دیواره لوله 0.065 است. سطح خارجی این لوله توسط جریان آب سرد خنک می شود و در نتیجه بخار آب در داخل لوله چگالیده شده، به صورت لایه مایعی از جدار داخلی لوله پایین می آید. در سطح مقطعی از لوله سرعت متوسط گاز 15ft/s و درجه حرارت متوسط آن 150°F، فشار آن یک جو و فشار بخار جزئی آب در توده 0.24 جو اندازه گیری شده است اگر درجه حرارت در فصل مشترک برابر با 107.5°F باشد، شدت چگالش موضعی بخار آب را در داخل لوله در این محل پیدا کنید.

H₂O : A

Air : B



حل: قطر داخل لوله مسی، d برابر است با

$$d = 1 - (0.065)(2) = 0.87'' = 0.0725'$$

$$N_B = 0 \Rightarrow \frac{N_A}{N_A + N_B} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

$$y_{A_1} = \frac{P_{A_1}}{P_t} = \frac{0.24}{1} = 0.24$$

$$y_{A_2} = \frac{P_{A_2}}{P_t} \xrightarrow{@ T=107.5^\circ F \rightarrow P_A=0.0806 \text{ atm}} y_{A_2} = 0.0806$$

$$M_M = \sum y_i M w_i = (0.24)(18.02) + (1 - 0.24)(29) = 26.4$$

$$\rho = \frac{PM}{RT} = \frac{1 * 26.4}{(0.73)(150 + 460)} = 0.0594 \quad \frac{lb_m}{ft^3}$$

$$\mu = 0.0175 (2.42) = 0.0424 \frac{lb_m}{ft.hr}$$

$$Sc = \frac{\mu}{\rho \cdot D_{AB}} = \frac{0.0424}{(0.0594)(1.19)} = 0.6$$

$$G' = \rho u = (15)(3600)(0.0594) = 3205 \frac{lb_m}{ft^2.hr} \quad G': \text{سرعت جرمی گاز}$$

$$G = \frac{G'}{M_M} = \frac{3205}{26.4} = 121.5 \frac{lb_{mol}}{ft^2.hr} \quad G: \text{سرعت مولی گاز}$$

$$Re = \frac{d \cdot G'}{\mu} = \frac{(0.0725)(3205)}{0.0424} = 5490$$

$$Table \ 3.3 \Rightarrow J_D = St \cdot Sc^{\frac{2}{3}} = \frac{F}{G} \cdot Sc^{\frac{2}{3}} = 0.023 Re^{-0.17}$$

$$F = \frac{0.023 \ G \ \text{Re}^{-0.17}}{Sc^{\frac{2}{3}}} = \frac{0.023 * (121.5)(5490)^{-0.17}}{(0.6)^{\frac{2}{3}}} = 0.91 \ \frac{lb_{mol}}{ft^2.hr}$$

$$N_A = F \ln \left[\frac{P_t - P_{A_2}}{P_t - P_{A_1}} \right] = 0.91 \ln \left[\frac{1 - 0.086}{1 - 0.24} \right] = 0.168 \ \frac{lb_{mol}}{ft^2.hr}$$

پایان فصل ۳