

## فصل دوم

# تقوید مهندسی در سیالات



## ◆ Mass Transfer ◆

مولکولهای هر ماده به خاطر داشتن انرژی حرکتی دارای حرکات نامنظم می باشند. وجود این حرکات نامنظم باعث می شود که مولکولهای یک ماده درون مولکولهای ماده دیگر نفوذ کنند. نظریه جنبشی گازها وسیله مناسبی برای توجیه این حرکات می باشد. در نظریه جنبشی فرض بر این است که هر مولکول در مسیر مستقیم با سرعت ثابت حرکت می کند و پس از طی مسافتی به مولکولی دیگر برخورد می کند و در اثر برخورد جهت و مقدار سرعت این مولکول تغییر پیدا می نماید. مقدار متوسط فواصلی که مولکول طی می کند تا با مولکول دیگری برخورد نماید به نام مسیر آزاد متوسط خوانده می شود.

**تعداد برخوردها / مسافت طی شده = Mean Free Path**

با توجه به اصول نظریه جنبشی میتوان با کم کردن فشار محیط که منجر به کاهش تعداد برخوردهای مولکولی می شود، و افزایش درجه حرارت که منجر به ازدیاد سرعت متوسط مولکولی می گردد، سرعت این پدیده مولکولی را بالا برد.



## ◆ Mass Transfer ◆

چنانچه غلظت اجزاء در نقاط مختلف یک محیط متفاوت باشد، به علت نفوذ مولکولی این اختلاف بتدریج از بین می رود و در نتیجه محیطی با غلظت یکنواخت حاصل می گردد. مثل زمانی که قطره ای از محلول آبی رنگ سولفات مس را در لیوان آبی وارد کنیم، مولکولهای سولفات مس در آب نفوذ کرده و پس از مدتی رنگ آبی تمام نقاط آب را در بر می گیرد.

شدت نفوذ مولکولی را در داخل یک محیط ممکن است بتوان با مخلوط کردن، به هم زدن و ایجاد حرکت در آن محیط تسریع کرد. به عنوان مثال مخزنی به قطر 5 ft و به ارتفاع 2.5 ft را در نظر بگیرید. در بالای لایه آب و نمک، لایه ای از آب خالص به ارتفاع 2.5 ft طوری قرار می دهیم که هیچگونه حرکت یا اختلالی در لایه پایین بوجود نیآورد. بر اثر نفوذ مولکولی نمک به لایه آبی منتقل می شود ولی به علت کند بودن پدیده نفوذ زمان طولانی لازم است که غلظت نمک در تمام نقاط یکسان شود مثلاً برای اینکه غلظت نمک در ظرف به 87.5 درصد غلظت نهایی در سطح لایه بالایی برسد 10 سال و برای رسیدن به غلظت 99%، حدود 28 سال زمان لازم است.



## ◆ Mass Transfer ◆

ولی با قرار دادن یک همزن که با سرعت 60 r.p.m کار کند این غلظت در مدت زمانی کمتر از 30 ثانیه صورت می پذیرد. در حقیقت در این حالت مخلوط شدن دو لایه توسط حرکات سریع قطعات کوچک و بزرگ مایع یا چرخانه ها (Eddy) که از ویژگیهای اصلی حرکت درهم است موجب می گردد که ذرات نمک همراه با آنها از لایه آب به لایه دیگر منتقل شود. انتقال جرم به کمک چرخانه ها را نفوذ چرخانه ای (Eddy Diffusion) یا نفوذ درهم (Turbulent Diffusion) می گویند.

عامل اصلی انتقال جرم در سیالات ساکن و یا سیالاتی که دارای حرکت آرام هستند نفوذ مولکولی است، بر عکس در مواردی که سیال دارای حرکت در هم است، عامل اصلی انتقال جرم، علی رغم وجود نفوذ مولکولی، نفوذ چرخانه ای است.

چنانچه دو فاز در حال تماس در حالت تعادل با یکدیگر نباشند، نفوذ مولکولی بین دو فاز برقرار می گردد. مثلاً لایه ای از مخلوط آمونیاک و هوا در تماس با لایه ای از آب قرار گیرد، در اثر نفوذ مولکولی آمونیاک بین دو فاز سرانجام حالت تعادل ایجاد می گردد و در نتیجه آن عمل نفوذ متوقف



## ◆ Mass Transfer ◆

می شود. در این حالت غلظت هر جز مثلاً آمونیاک ، در هر فاز یکنواخت است ولی مقدار این غلظت در فاز آب با مقدار آن در فاز هوا متفاوت می باشد. در چنین حالتی پتانسیل شیمیایی ( ضریب فعالیت آن ) آمونیاک در فاز هوا با پتانسیل شیمیایی آن در فاز آب برابر خواهد بود . در حقیقت برابری پتانسیل شیمیایی آمونیاک بین دو فاز باعث متوقف شدن عمل نفوذ می گردد.



# نفوذ مولکولی





## ◆ Mass Transfer ◆

هرگاه در محلولی غلظت اجزا یکنواخت نباشد، نفوذ مولکولی موجب می گردد که تغییرات تدریجی در غلظت اجزا ایجاد شود و سرانجام غلظت تمام اجزا در تمام نقاط محیط یکنواخت گردد. شدت نفوذ هر جزء در هر نقطه متناسب با گرادیان غلظت آن جزء در آن نقطه می باشد.

شدت نفوذ مولکولی معمولاً بر حسب شار (flux) مولی بیان می شود که عبارت از تعداد مول های انتقال یافته به ازای واحد زمان در واحد سطح (صفحه عمود بر جهت نفوذ) می باشد.

شار انتقال هر جز در یک مخلوط یک مقدار نسبی است و این مقدار بر حسب مبنای انتخابی تعیین می گردد، مثلاً اگر مبنای مقایسه نقطه ثابتی در فضا باشد، و شار هر جز نسبت به آن نقطه تعیین می گردد. این شار را با  $N$  نمایش می دهند و اگر مبنای مقایسه حرکت ناشی از نفوذ اجزا در مخلوط باشد و شار هر جز نسبت به سرعت مولی متوسط حاصل از حرکت تعیین گردد، این شار را با  $J$  نشان می دهند.



## ◆ Mass Transfer ◆

شار  $J$  برای هر جز بیشتر تابع ویژگی های آن می باشد و یک مقدار نسبی را معین می سازد .  
برای یک ماهیگیر سرعت حرکت ماهی در جهت مخالف جریان آب ( معادل  $N$  ) نسبت به قلاب ماهی گیری (نقطه ای ثابت در آب ) اهمیت دارد ، در حالی که سرعت ماهی نسبت به جریان آب معادل ( $J$ ) معرف قدرت شنا گری ماهی است.



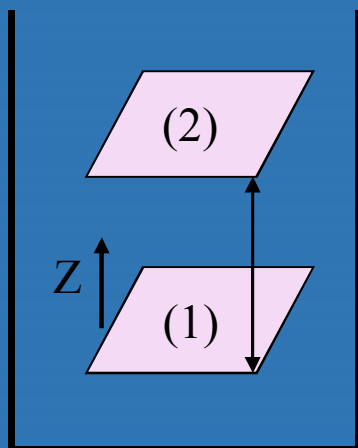


# قانون اول فیک ( Fick's Law )



## Mass Transfer

اگر دو سطح (1) و (2) را در نظر بگیریم که غلظت جزء A در سطح (1) بیشتر از غلظت آن در سطح (2) باشد نفوذ جزء A از سطح (1) به سطح (2) صورت خواهد پذیرفت :



گرادیان غلظت بین دو سطح :  $-\frac{dC_A}{dz}$

تعداد مولهایی که در واحد زمان از واحد سطح می گذرد :  $N_{AZ}$

$$\frac{J_{AZ}}{-\frac{dc_A}{dz}} = D_{AB}$$

$$J_{AZ} = -D_{AB} \frac{dc_A}{dz} \quad \text{قانون اول فیک:}$$



## : $D_{AB}$ (Diffusivity)

مطابق تعریف ضریب نفوذ جزء A در مخلوط A و B می باشد که برابر با نسبت شار مولی آن جزء ( $J_A$ ) بر گرادیان غلظت می باشد.

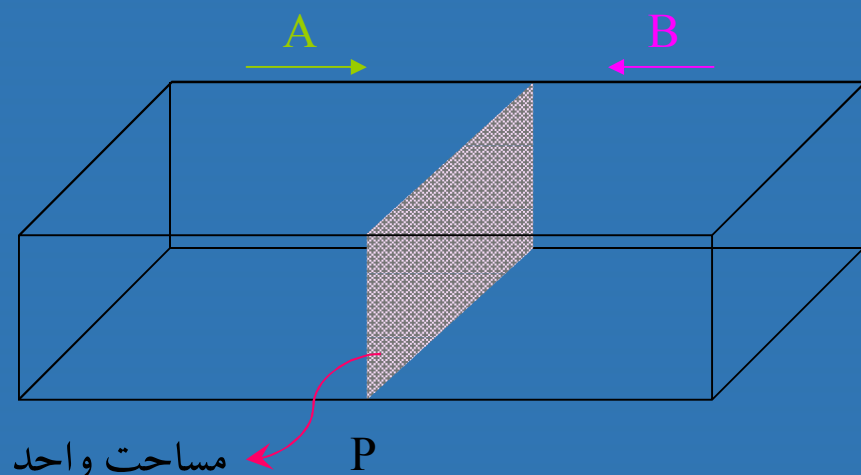
$$J_{AZ} = -D_{AB} \frac{dc_A}{dz}$$

علامت منفی مشخص کننده آن است که نفوذ جزء A در جهتی است که غلظت آن کم است، انجام می گیرد.

ضریب نفوذ  $D_{AB}$  یک خاصیت فیزیکی بوده است که معرف تحرک مولکولی جزء A در جزء B می باشد. برای هر جزء این ضریب بستگی به ویژگیهای آن جزء و شرایط محیط آن از جمله درجه حرارت، فشار، غلظت و نیز طبیعت سایر اجزا دارد.



## Mass Transfer



شکل زیر یک عنصر هندسی (Element) از سیالی را که شامل دو جزء  $A, B$  است را نشان می دهد. سطح مقطع این عنصر برابر با واحد است. غلظت  $A$  در سمت چپ صفحه  $P$  بیشتر از غلظت آن در سمت راست این صفحه است در حالی که غلظت جزء  $B$  در سمت راست صفحه بیشتر از غلظت

آن در سمت راست این صفحه می باشد. در چنین شرایطی نفوذ اجزا در جهاتی که در شکل نشان داده شده انجام می پذیرد.

شدت جریان حجمی جزء  $A$  (و یا سرعت آن، زیرا سطح مقطع برابر واحد اختیار شده است) را  $U_A$  و شدت جریان حجمی  $B$  را  $U_B$  می نامیم. اگر صفحه  $P$  همواره طوری قرار گیرد که حجم دو قسمتی که



## Mass Transfer

در دو طرف صفحه است ثابت باقی بماند، در این صورت  $U_A = -U_B$  خواهد بود و برای ناظری که روی صفحه P قرار دارد شدت عبور مولکولهای جزء A برابر است با:

$$N_A = \frac{u_A \rho_A}{M_A} = u_A \cdot C_A \quad N_B = \frac{u_B \rho_B}{M_B} = u_B \cdot C_B$$

$C_B$  و  $C_A$  غلظت های مولی اجزا می باشد.

برای چنین ناظری شدت منتج (Net Rate) عبور مولکولها از صفحه P با شاری معادل با  $N_A + N_B$  برابر است. اگر چنین شاری را بر حسب سرعت متوسط مولکولها (شدت جریان حجمی مولکولها) بیان کنیم این سرعت برابر خواهد بود با:

$$u_m = \frac{u_A \cdot C_A + u_B \cdot C_B}{C} = \frac{N_A + N_B}{C} \quad C = C_A + C_B$$



## ◆ Mass Transfer ◆

اگر ناظر خود با سرعتی برابر  $u_m$  حرکت کند در این صورت تعداد منتج مولکولهایی که از مقابل او عبور می کند صفر خواهد بود. با توجه به مطالب گفته شده می توان گفت که شار  $N_A$  نسبت به نقطه ثابت  $P$  از شار  $J_A$  بزرگتر است و این اختلاف برابر با مقداری از جزء  $A$  است که با سرعت  $u_m$  انتقال می یابد.

$$N_A = u_m C_A + J_A$$

$$N_A = (N_A + N_B) \frac{C_A}{C} - D_{AB} \frac{dC_A}{dz}$$

$$N_B = (N_A + N_B) \frac{C_B}{C} - D_{BA} \frac{dC_B}{dz}$$





## Mass Transfer

چنانچه این دو معادله را با یکدیگر جمع کنیم:

$$N_A + N_B = (N_A + N_B) \frac{C_A}{C} - D_{AB} \frac{d_{C_A}}{dz} + (N_A + N_B) \frac{C_B}{C} - D_{BA} \frac{d_{C_B}}{dz}$$

$$N_A + N_B = [(N_A + N_B) \left( \frac{C_A}{C} + \frac{C_B}{C} \right)] - D_{AB} \frac{d_{C_A}}{dz} - D_{BA} \frac{d_{C_B}}{dz}$$

$\frac{C}{C}$

$$-D_{AB} \frac{d_{C_A}}{dz} - D_{BA} \frac{d_{C_B}}{dz} = 0 \longrightarrow -D_{AB} \frac{d_{C_A}}{dz} = D_{BA} \frac{d_{C_B}}{dz} \quad *$$



## Mass Transfer

و یا اینکه  $J_A = -J_B$  می باشد. اگر مجموع  $C_A$  ,  $C_B$  مقدار ثابتی باشد از معادله \* می توان نتیجه گرفت که  $D_{BA} = D_{AB}$  می باشد

در بدست آوردن معادله فوق فرض بر این بوده است که نفوذ اجزا تنها در یک جهت صورت گیرد.

انتقال جرم در یک سیستم بطور کلی می تواند ناشی از دو عامل زیر باشد:

الف: ناشی از نفوذ مولکولی

ب: ناشی از حرکت سیال یا Bulk Flow

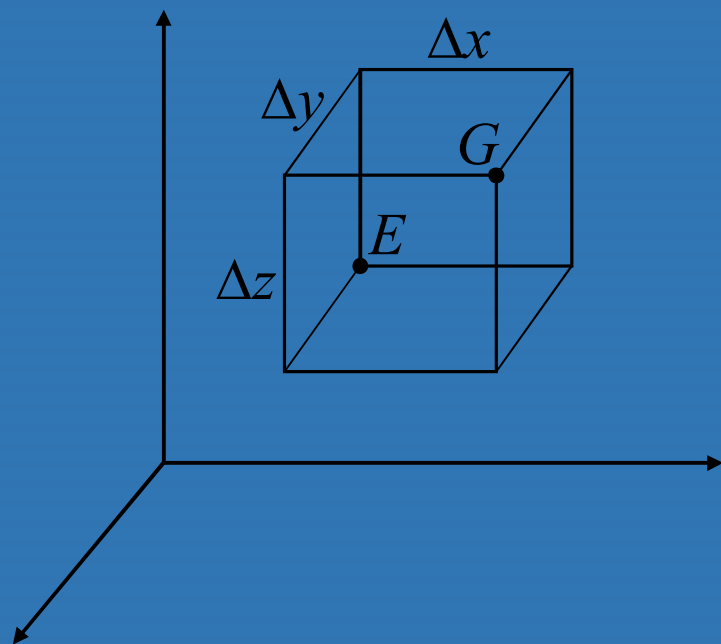
$$N_{AZ} = J_{AZ} + x_A \sum N_z$$



# معادله پیوستگی



## Mass Transfer



$$G(\Delta x+x, \Delta y+y, \Delta z+z)$$

$$E(x,y,t)$$

(شدت تولید در داخل المان) + (شدت خروج از المان) - (شدت ورود به المان) = شدت انباشتگی در المان

اگر شدت جریان جرمی جزء  $A$  را به درون المان بنویسیم :

$$M_A \cdot R_A \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z : \text{در واحد زمان } A \text{ شدت جرمی تولید جزء}$$



## ◆ Mass Transfer ◆

A شدت انباشتگی جزء :  $\frac{\partial M}{\partial \theta} = \frac{\partial(\rho V)}{\partial \theta} = \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial \theta}$

$$\dot{M} = N \cdot A \cdot M_w \Rightarrow$$

X شدت ورود در جهت :  $N_{A X} \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot M_A$

X شدت خروج در جهت :  $(N_{A X})_{x+\Delta x} \Delta y \cdot \Delta z \cdot M_A$

Y شدت ورود در جهت :  $N_{A y} \cdot \Delta x \cdot \Delta z \cdot M_A$

Y شدت خروج در جهت :  $(N_{A y})_{y+\Delta y} \cdot \Delta x \cdot \Delta z \cdot M_A$

Z شدت ورود در جهت :  $N_{A Z} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot M_A$

Z شدت خروج در جهت :  $(N_{A Z})_{z+\Delta z} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot M_A$



## Mass Transfer

( شدت انباشتگی + شدت ورود + شدت خروج = شدت تولید )

اگر پارامتر های نوشته شده را در معادله اصلی جا گذاری نمائیم :

$$M_A \left\{ [(N_{AX})_{X+\Delta X} - (N_{AX})] \Delta y \Delta z + [(N_{Ay})_{y+\Delta y} - (N_{Ay})] \Delta x \Delta z + [(N_{AZ})_{Z+\Delta Z} - (N_{AZ})] \Delta x \Delta y \right\} + \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho_A}{\partial \theta} = M_A R_A \Delta x \Delta y \Delta z$$

اگر معادله فوق را بر  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  تقسیم کرده حد آن را برای حالتی که  $\Delta x$  و  $\Delta y$  و  $\Delta z$  به سمت صفر میل میکند تعیین نماییم در این صورت خواهیم داشت:

$$**M_A \left( \frac{\partial N_{AX}}{\partial x} + \frac{\partial N_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial N_{Az}}{\partial z} \right) + \frac{\partial \rho_A}{\partial \theta} = M_A R_A$$

به همین ترتیب برای جزء B می توان نوشت:

$$M_B \left( \frac{\partial N_{BX}}{\partial x} + \frac{\partial N_{By}}{\partial y} + \frac{\partial N_{Bz}}{\partial z} \right) + \frac{\partial \rho_B}{\partial \theta} = M_B R_B$$





## Mass Transfer

و از جمع جبری دو معادله بالا می توان نوشت:

$$\frac{\partial(M_A N_A + M_B N_B)x}{\partial x} + \frac{\partial(M_A N_A + M_B N_B)y}{\partial y} + \frac{\partial(M_A N_A + M_B N_B)z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0$$

توجه:

$$M_A R_A = -M_B R_B$$

$$\rho_A + \rho_B = \rho$$

$$M_A N_{Ax} = u_x \rho_A + M_A J_{Ax}$$

در اینجا  $U_x$  سرعت متوسط جرمی در جهت Xها بوده و از رابطه زیر بدست می آید:

$$\rho u_x = u_{Ax} \rho_A + u_{Bx} \rho_B = M_A N_{Ax} + M_B N_{Bx}$$

بنابراین:

$$\frac{\partial}{\partial x}(M_A N_A + M_B N_B)_x = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) = \rho \frac{\partial u_x}{\partial x} + (u_x) \frac{\partial \rho}{\partial x}$$



## Mass Transfer

و همین طور:

$$\frac{\partial}{\partial y}(M_A N_A + M_B N_B)_y = \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) = \rho \frac{\partial u_y}{\partial y} + (u_y) \frac{\partial \rho}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(M_A N_A + M_B N_B)_z = \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = \rho \frac{\partial u_z}{\partial z} + (u_z) \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

و در نتیجه:

$$\rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + u_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0$$

معادله فوق معادله پیوستگی برای کل مواد است. در حالتی که جرم ویژه محلول ثابت باشد خواهیم داشت :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$



## Mass Transfer

برای یافتن معادله پیوستگی جزء A می توان نوشت:

$$M_A \cdot N_{Ax} = u_x P_A + M_A J_{Ax}$$

$$M_A \frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} = u_x \frac{\partial \rho_A}{\partial x} + \rho_A \frac{\partial u_x}{\partial x} + M_A \frac{\partial J_{Ax}}{\partial x} = u_x \frac{\partial P_A}{\partial x} + P_A \frac{\partial u_x}{\partial x} - M_A D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2}$$

که اگر این مقادیر را در معادله \*\* جایگزین کنیم خواهیم داشت:

$$u_x \frac{\partial \rho_A}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho_A}{\partial y} + u_z \frac{\partial \rho_A}{\partial z} + \rho_A \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - M_A D_{AB} \left( \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \rho_A}{\partial \theta} = M_A R_A$$

معادله پیوستگی

پس از تقسیم طرفین بر  $M_A$  خواهیم داشت:

$$\frac{\rho_A}{M_A} = C_A \rightarrow u_x \frac{\partial C_A}{\partial x} + u_y \frac{\partial C_A}{\partial y} + u_z \frac{\partial C_A}{\partial z} + \frac{\partial C_A}{\partial \theta} = D_{AB} \left( \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right) + R_A$$



## ◆ Mass Transfer ◆

در حالت خاصی که سرعت برابر صفر باشد و واکنش شیمیایی نیز نداشته باشد:

$$\frac{\partial C_A}{\partial \theta} = D_{AB} \left( \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right) = D_{AB} \nabla^2 C_A$$

این معادله اکثراً در مورد انتقال جرم در جامدات به کار می رود ولی در بعضی حالات خاص برای محاسبه انتقال جرم در سیالات نیز قابل استفاده است.

