

فصل سوم

انتقال جرم در شرایط یکنواخت (سیال ساکن، موضعی از یک جریان آرام، جامدات)

۳-۱ رابطه کلی انتقال جرم در اثر نفوذ مولکولی و حرکت توده‌ای - شرایط یکنواخت

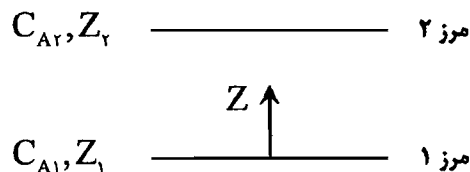
از رابطه (۳-۲) برای لایه‌ای که در آن انتقال جرم از مرز ۱ به مرز ۲ صورت می‌گیرد (شکل زیر) استفاده می‌کنیم. برای سادگی کار سیستم را دو جزئی فرض می‌کنیم. بنابراین:

$$\sum_{i=A}^n N_{iz} = N_{AZ} + N_{BZ}$$

$$J_{AZ} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dz}$$

از طرفی با استفاده از قانون اول فیک

$$N_{AZ} = J_{AZ} + x_A \sum_{i=A}^n N_{iz} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dz} + x_A (N_{AZ} + N_{BZ}) \quad (۳-۱)$$



شرایط مرزی

$$\begin{array}{ll} BC_1 & Z = Z_1 \quad C_A = C_{A1} \\ BC_2 & Z = Z_2 \quad C_A = C_{A2} \end{array}$$

$$x_A = \frac{C_A}{C}$$

$$N_{AZ} - \frac{C_A}{C} (N_{AZ} + N_{BZ}) = -D_{AB} \frac{dC_A}{dZ}$$

$$\int_{Z_1}^{Z_2} dz = - \int_{C_{A1}}^{C_{A2}} \frac{D_{AB} dC_A}{N_{AZ} - \frac{C_A}{C} (N_{AZ} + N_{BZ})}$$

با فرض آنکه غلظت کل در لایه ثابت، D_{AB} ثابت و N_{AZ} و N_{BZ} نیز ثابت و مستقل از Z در لایه باشند داریم:

$$N_{AZ} = \frac{N_{AZ}}{N_{AZ} + N_{BZ}} \frac{D_{AB} C}{Z} \ln \frac{\frac{N_{AZ}}{N_{AZ} + N_{BZ}} - \frac{C_{A2}}{C}}{\frac{N_{AZ}}{N_{AZ} + N_{BZ}} - \frac{C_{A1}}{C}} \quad (2-3)$$

$$Z = Z_2 - Z_1 \quad \text{ضخامت لایه انتقال جرم}$$

در بسیاری مسائل نسبت $\frac{N_{AZ}}{N_{AZ} + N_{BZ}}$ مشخص است درحالیکه مقادیر N_{AZ} و N_{BZ} به

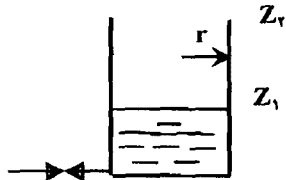
تنهایی مشخص نبوده و لذا رابطه به صورت فوق مرتب شده است.

$$\dot{m}_{AZ} = N_{AZ} S M_A \quad (3-3)$$

S = سطح مقطع انتقال جرم در لایه

توجه: در بسیاری مواقع با توجه به نازک بودن لایه انتقال جرم فرض ثابت بودن N_{AZ} و N_{BZ} در لایه انتقال جرم صحیح به نظر می‌رسد. هر چند بهتر است برای موارد خاص اثر تغییرات N_{AZ} و N_{BZ} (تغییرات فلاکس انتقال جرم) ناشی از تغییرات سطح انتقال جرم در لایه انتقال جرم بررسی شود. برای آنکه مطلب کمی روشن تر شود به مثالهای زیر توجه نمایید.

تبخیر آب درون ظرفی استوانه‌ای مطابق شکل زیر صورت می‌گیرد. سطح آب درون ظرف ثابت فرض می‌شود (مایع تبخیر شده تأمین می‌شود). بنابراین لایه انتقال جرم $(Z_f - Z_1)$ ثابت و مشخص است. شرایط عملیاتی، دما و فشار، در لایه انتقال جرم ثابت فرض می‌شود. سطح مقطع انتقال جرم در هر موضع Z در فاصله $Z_f - Z_1$ (لایه انتقال جرم) ثابت است. لذا رابطه (۲-۳) در این شکل قابل استفاده است.



تأمین آب تبخیر شده

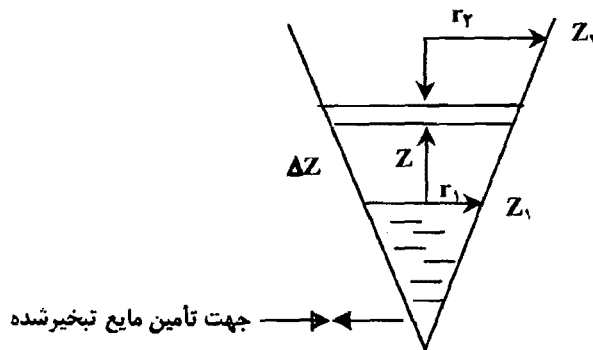
$$N_{AZ} = \text{ثابت} = \text{فلاکس انتقال جرم}$$

$$N_{AZ} M_A S = \text{ثابت} = \text{دبی انتقال جرم}$$

$$S = \text{سطح مقطع} = \pi r^2$$

شکل ۱-۳ تبخیر آب درون ظرف استوانه‌ای

در مثال دیگری، تبخیر آب درون ظرف مخروطی مطابق شکل زیر را در نظر بگیرید. سطح آب درون ظرف ثابت فرض می‌شود (تبخیر آب تأمین می‌شود). لایه انتقال جرم $Z_f - Z_1$ در شکل ثابت و مشخص شده است. شرایط عملیاتی، دما و فشار، در لایه انتقال جرم ثابت است لیکن سطح مقطع در لایه انتقال جرم از نقطه Z_1 تا Z_f در حال تغییر و افزایش است. بنابراین فلاکس انتقال جرم N_{AZ} و N_{BZ} در لایه انتقال جرم ثابت نبوده و لذا رابطه (۲-۳) در این شکل در لایه انتقال جرم قابل استفاده نیست؛ هر چند دبی انتقال جرم در مواضع مختلف از Z_1 تا Z_f ثابت است.



شکل ۲-۳ تبخیر آب درون ظرف مخروطی شکل

$$N_{AZ} = J_{AZ} + x_A \sum_{i=A}^n N_{iz}$$

در این حالت،

$$\sum_{i=A}^n N_{iz} = N_{AZ}$$

فقط تبخیر آب صورت می‌گیرد

$$J_{AZ} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dz}$$

قانون اول فیک

$$N_{AZ} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dz} + x_A N_{AZ}$$

$$N_{AZ} = -\frac{D_{AB}C}{C-C_A} \frac{dC_A}{dZ}$$

با توجه به آنکه دبی انتقال جرم ثابت است (زیرا با بیلان جرم در لایه نازک عمود بر جهت انتقال جرم در لایه انتقال جرم می‌توان دید):
در شرایط یکنواخت و بدون واکنش شیمیایی در لایه انتقال جرم

$$0 = \text{جرم خروجی} - \text{جرم ورودی}$$

$$M_A [N_{AZ}S|_Z - N_{AZ}S|_{Z+\Delta Z}] = 0$$

$$S = \pi r^2, \quad r = f(z) \quad \text{متغیر است.}$$

$$\frac{d(M_A N_{AZ} S)}{dZ} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{d\dot{m}_{AZ}}{dz} = 0 \quad \text{ثابت} \quad \dot{m}_{AZ} : \text{بنابراین}$$

$$\dot{m}_{AZ} = M_A N_{AZ} S = \text{ثابت} \quad (3-3)$$

$$S = \pi r^2, \quad r = f(z), \quad \frac{Z - Z_1}{r - r_1} = \frac{Z_r - Z_1}{r_r - r_1}$$

$$r = \left(\frac{Z - Z_1}{Z_r - Z_1} \right) (r_r - r_1) + r_1$$

$$S|_Z = \left[\left(\frac{r_r - r_1}{Z_r - Z_1} \right) (Z - Z_1) + r_1 \right]^2 \pi$$

با جایگذاری مقدار N_{AZ} و S در رابطه (۳-۳) جهت دستیابی به دبی انتقال جرم،

$$\dot{m}_{AZ} = M_A \left(-\frac{D_{AB}C}{C-C_A} \frac{dC_A}{dZ} \right) \pi r^2$$

با انتگرال گیری و اعمال شرایط مرزی:

$$\dot{m}_{AZ} = \frac{\pi D_{AB} C (r_1 r_r) M_A}{Z_r - Z_1} \ln \frac{C - C_{Ar}}{C - C_{A1}} \quad (4-3)$$

$$\text{اگر رابطه (۲-۳) را برای حالت } \sum_{i=A}^n N_{iz} = N_{AZ} \quad \text{و یا} \quad \frac{N_{AZ}}{N_{AZ} + N_{BZ}} = 1 \quad \text{در لایه } Z_r - Z_1$$

بنویسیم داریم:

$$N_{AZ} = \frac{D_{AB} C}{Z_r - Z_1} \ln \frac{C - C_{Ar}}{C - C_{A1}} \quad (5-3)$$

بنابراین دبی انتقال جرم در لایه مورد نظر و با توجه به روابط (۴-۳) و (۵-۳)

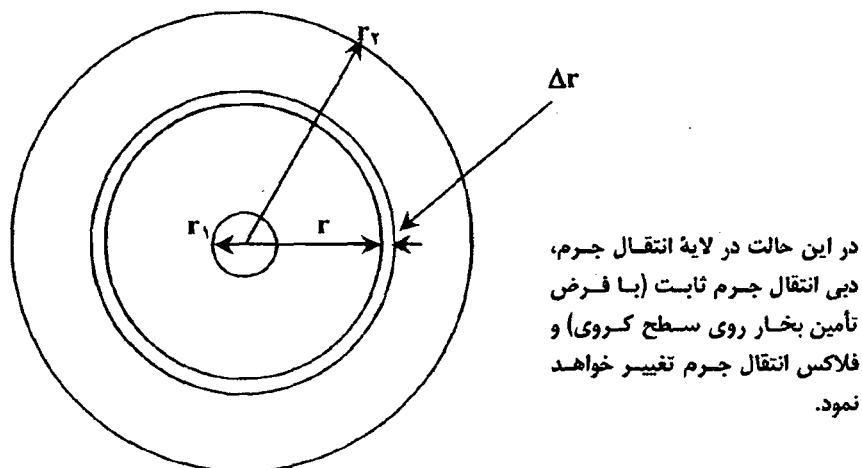
$$\dot{m}_{AZ} = M_A \bar{S}_{av} N_{AZ} \quad (6-3)$$

که سطح متوسط در لایه انتقال جرم عبارتست از:

$$\bar{S}_{av} = \pi r_1 r_2$$

البته می‌توان مقدار فلاکس را در هر موضع خاص Z بین $Z_1 - Z_2$ بدست آورد. به مثال دیگری در این خصوص توجه نمایید.

مثال - تبخیر از سطح یک قطعه کروی به محیط اطراف را در نظر بگیرید. برای لحظه‌ای که شعاع قطعه ثابت و برابر r_1 است انتقال جرم را به اطراف کره بررسی نمایید. سطح انتقال جرم در لایه اطراف ثابت نمی‌باشد. شرایط عملیاتی دما، فشار در لایه انتقال جرم ثابت فرض می‌شود. در این حالت رابطه (۲-۳) در لایه انتقال جرم استفاده نخواهد شد.



شکل ۳-۳ انتقال جرم اطراف کره

انتقال جرم فقط در جهت r صورت می‌گیرد و انتقال جرم از سایر جهات قابل اغماض می‌باشد.

$$N_{Ar} = J_{Ar} + x_A \sum_{i=A}^n N_{ir}$$

$$\sum_{i=A}^n N_{ir} = N_{Ar}$$

فقط تبخیر آب از سطح کره صورت می‌گیرد.

$$J_{Ar} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dr}$$

$$N_{Ar} = - \frac{D_{AB}}{1-x_A} \frac{dC_A}{dr} \quad \text{بنابراین}$$

با توجه به آنکه دبی انتقال جرم ثابت است، با بیلان جرم در لایه نازک عمود بر جهت انتقال جرم در لایه انتقال جرم نیز می‌توان دید:

شرایط یکنواخت - بدون واکنش شیمیایی:

$$M_A [N_{Ar} S|_r - N_{Ar} S|_{r+\Delta r}] = 0$$

$$S = \epsilon \pi r^2$$

$$\frac{d(M_A N_{Ar} S)}{dr} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{d\dot{m}_{Ar}}{dr} = 0 \quad \text{و} \quad \dot{m}_{Ar} = \text{ثابت}$$

$$\dot{m}_{Ar} = M_A N_{Ar} S = \text{ثابت}$$

$$\dot{m}_{Ar} = - \frac{D_{AB}}{1-x_A} M_A \epsilon \pi r^2 \frac{dC_A}{dr}$$

با اعمال شرایط مرزی و انتگرال گیری:

$$\int_{r_1}^{r_2} \dot{m}_{Ar} \frac{dr}{r^2} = \int_{C_{A1}}^{C_{A2}} - \frac{D_{AB}}{1-x_A} M_A \epsilon \pi dC_A$$

دبی انتقال جرم از کره‌ای به شعاع r_1 به نقطه‌ای به فاصله r_2 از مرکز کره:

$$\dot{m}_{Ar} = \frac{D_{AB} C}{r_2 - r_1} M_A \epsilon \pi r_1 r_2 \ln \frac{C - C_{A2}}{C - C_{A1}} \quad (7-3)$$

اگر رابطه (۲-۳) را برای حالتی که $\sum_{i=A}^n N_{ir} = N_{Ar}$ و یا $\frac{N_{Ar}}{\sum_{i=A}^n N_{ir}} = 1$ است بنویسیم و

ضخامت لایه انتقال جرم را $r_2 - r_1$ در نظر بگیریم:

$$N_{Ar} = \frac{D_{AB} C}{r_2 - r_1} \ln \frac{C - C_{A2}}{C - C_{A1}}$$

بنابراین می‌توان گفت:

$$\dot{m}_{Ar} = M_A \bar{S}_{av} N_{Ar}$$

$$\bar{S}_{av} = \epsilon \pi r_1 r_2$$

خلاصه

بنابراین بطور کلی رابطه زیر برای دستیابی به دبی انتقال جرم در لایه‌ای که در آن سطح مقطع ثابت و یا متغیر است قابل استفاده خواهد بود.

$$\dot{m}_A = M_A \bar{S}_{av} N_A$$

$$= M_A \bar{S}_{av} \frac{N_A}{N_A + N_B} \frac{D_{AB} C}{\delta} \ln \frac{\frac{N_A}{N_A + N_B} - \frac{C_{A2}}{C}}{\frac{N_A}{N_A + N_B} - \frac{C_{A1}}{C}} \quad (۸-۳)$$

$$\text{در موضع خاص} | N_A = \frac{\dot{m}_A}{M_A S} = \text{فلاکس انتقال جرم در هر موضع} \quad (۹-۳)$$

$$\text{سطح مقطع ثابت} \quad \bar{S}_{av} = S \quad \delta = Z - Z_1 \quad (\text{شکل ۱-۳})$$

$$\text{سطح مقطع لایه مخروطی} \quad \bar{S}_{av} = \pi r_1 r \quad \delta = Z - Z_1 \quad (\text{شکل ۲-۳})$$

$$\text{سطح مقطع لایه کروی} \quad \bar{S}_{av} = \frac{4}{3} \pi r_1 r \quad \delta = r - r_1 \quad (\text{شکل ۳-۳})$$

توجه مهم: همانطور که قبلاً نیز اشاره شد در بسیاری از موقعیت‌های واقعی انتقال جرم، ضخامت لایه انتقال جرم بسیار کم است (در حد میلیمتر، دهم و صدم میلیمتر) و با وجود آنکه می‌دانیم در موقعیتی خاص سطح انتقال جرم در لایه تغییر می‌کند (مانند تیغه کروی، استوانه‌ای و ...) اما چون مقدار تغییرات سطح فوق العاده ناچیز است فرض می‌کنیم که سطح مقطع انتقال جرم در لایه ثابت بوده و تغییری نمی‌کند. لذا ثابت بودن فلاکس و دبی با دقت کافی صحیح به نظر می‌رسد و همواره رابطه (۲-۳) قابل استفاده خواهد بود و به دنبال آن مقدار دبی انتقال جرم از رابطه (۸-۳) محاسبه خواهد شد.

همسو و غیرهمسو بودن نفوذ مولکولی و حرکت توده‌ای

نفوذ مولکولی همواره از نقطه‌ای با غلظت بیشتر به نقطه‌ای با غلظت کمتر صورت می‌گیرد، درحالی‌که حرکت توده‌ای (ناشی از اختلاف دانسیته در کنوکسیون طبیعی، یا وجود نیروی مکانیکی خاص در کنوکسیون اجباری) می‌تواند در خلاف جهت و یا همسو با نفوذ مولکولی صورت گیرد. در این خصوص به مثال زیر توجه کنید.

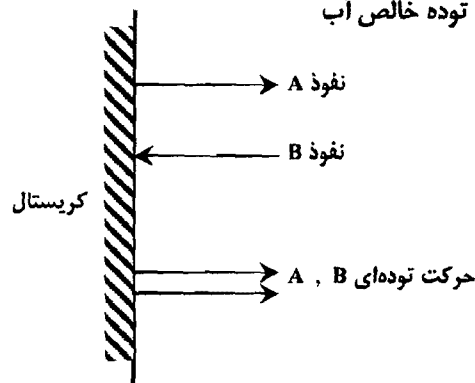
مثال: در حلالیت کریستال کربنات سدیم ($\text{Na}_2\text{CO}_3 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$) جهت نفوذ و حرکت توده‌ای را برای کربنات سدیم (A) و آب (B) که درون ظرفی محتوی آب خالص صورت می‌گیرد مشخص نمایید. دما ثابت فرض می‌شود (20°C)، شرایط یکنواخت می‌باشد.

حل: با حل شدن کریستال در آب خالص به ازاء هر مول کریستال، یک مول کربنات سدیم و ۱۰ مول آب وارد لایه انتقال جرم (مرز ۱، فصل مشترک کریستال و آب و مرز ۲، توده مایع آب خالص) خواهد شد. بنابراین همواره:

$$N_B = 10 \cdot N_A$$

$$\frac{N_A}{N_A + N_B} = \frac{1}{11}$$

غلظت کربنات سدیم در مایع چسبنده به سطح کریستال (مرز ۱) برابر است با خلالت کربنات سدیم در آب در دمای عملیاتی (دمای مرز ۱)، که در دمای 20°C برابر است با $x_{A1} = 0.0353$ ، بنابراین نفوذ مولکولی کربنات سدیم از سطح کریستال (با جزء مولی 0.0353) به توده مایع (آب خالص) صورت می گیرد، درحالیکه حرکت توده ای از سطح کریستال به سمت توده سیال است. در مورد آب، نفوذ مولکولی آب از توده سیال (با غلظت $x_{B2} = 1$) به سمت سطح کریستال ($x_{B1} = 1 - 0.0353$) حرکت می کند، درحالیکه حرکت توده ای آب باز از مرز ۱ به سمت ۲ خواهد بود. بنابراین در این مثال جهت نفوذ مولکولی و حرکت توده ای برای کربنات سدیم همسو و برای آب غیرهمسو خواهد بود.



۳-۲ انتقال جرم در اثر نفوذ مولکولی و حرکت توده ای در یک لایه گازی

رابطه کلی انتقال جرم برای یک لایه گازی

نفوذ مولکولی و حرکت توده ای برای گازها را در یک سیال ساکن یا موضعی از جریان آرام (در جریان آرام خطوط جریان روی هم قرار گرفته و حرکت شعاعی وجود ندارد، لذا جهت حرکت نقشی در انتقال جرم عمودی نخواهد داشت) بررسی می کنیم.

رابطه کلی زیر را با فرض ثابت بودن C ، D_{AB} ، N_{AZ} و N_{BZ} بدست می آوریم:

$$N_{AZ} = \frac{N_{AZ}}{N_{AZ} + N_{BZ}} \frac{D_{AB} C}{Z} \ln \frac{\frac{N_{AZ}}{N_{AZ} + N_{BZ}} - \frac{C_{A2}}{C}}{\frac{N_{AZ}}{N_{AZ} + N_{BZ}} - \frac{C_{A1}}{C}}$$

علاوه بر فرضیات گذشته اضافه می‌کنیم که:

$$C = \frac{P_t}{RT} \quad \text{اگر گاز ایده‌آل باشد}$$

$$\frac{C_{A_T}}{C} = y_{A_T} \quad , \quad \frac{C_{A_1}}{C} = y_{A_1}$$

$$N_{AZ} = \frac{N_{AZ}}{N_{AZ} + N_{BZ}} \frac{D_{AB} P_t}{RTZ} \ln \frac{\frac{N_{AZ}}{N_{AZ} + N_{BZ}} - y_{A_T}}{\frac{N_{AZ}}{N_{AZ} + N_{BZ}} - y_{A_1}} \quad (۱۰-۳)$$

$$C = \frac{P_t}{RT} \quad , \quad C_{A_1} = \frac{P_{A_1}}{RT} \quad , \quad C_{A_T} = \frac{P_{A_T}}{RT} \quad \text{یا می‌توان نوشت:}$$

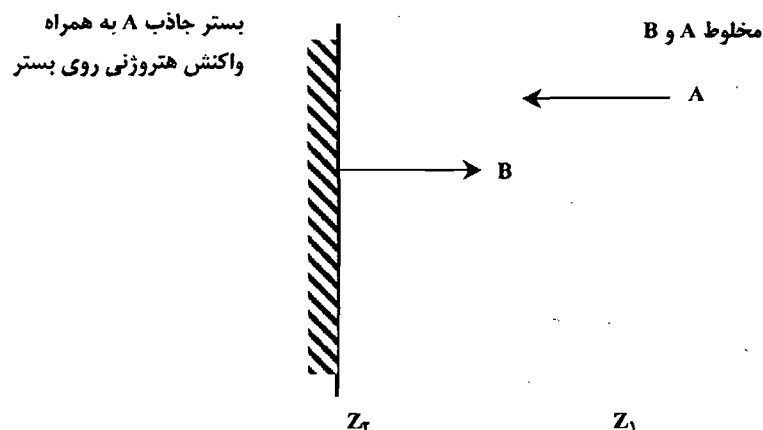
$$N_{AZ} = \frac{N_{AZ}}{N_{AZ} + N_{BZ}} \frac{D_{AB} P_t}{RTZ} \ln \frac{\frac{N_{AZ}}{N_{AZ} + N_{BZ}} - \frac{P_{A_T}}{P_t}}{\frac{N_{AZ}}{N_{AZ} + N_{BZ}} - \frac{P_{A_1}}{P_t}}$$

حالت خاص ۱: انتقال جرم مساوی و متقابل $N_{AZ} = -N_{BZ}$

وقتی در یک لایه انتقال جرم و در یک سیستم دو جزئی، انتقال جرم مساوی و متقابل صورت گیرد. در اینصورت می‌توان نوشت:

$$N_{AZ} = -N_{BZ}$$

به عنوان مثال فرض کنید مخلوط گازی A و B در تماس با سطح جاذب A قرار دارد و واکنش هتروژنی به صورت $A \rightarrow B$ روی سطح صورت گیرد در اینصورت رابطه فوق $(N_{AZ} = -N_{BZ})$ در این حالت صادق خواهد بود.



چند نکته:

- ۱- جهت نفوذ و حرکت توده‌ای را در مثال فوق برای A, B مشخص کنید.
- ۲- حالت فوق ($N_{AZ} = -N_{BZ}$) در یک لایه گازی در عملیات تقطیر و با فرض صادق بودن روش مک کیب تیلی (Mc Cabe - Thiele) اتفاق می‌افتد (اطلاعات بیشتر در مورد روش مک کیب - تیلی در درس عملیات واحد آمده است).
- در صورت انتقال جرم مساوی و متقابل ($N_{AZ} = -N_{BZ}$) می‌توان نوشت:

$$N_{AZ} + N_{BZ} = 0$$

$$N_{AZ} = J_{AZ} + X_A (N_{AZ} + N_{BZ})$$

$$N_{AZ} = J_{AZ} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dz}$$

$$\text{شرایط مرزی} \quad Z = Z_1 \quad C_A = C_{A1} \quad \text{و} \quad Z = Z_2 \quad C_A = C_{A2}$$

$$N_{AZ} = \frac{D_{AB}}{Z_2 - Z_1} (C_{A1} - C_{A2}) \quad (11-3)$$

$$N_{AZ} = \frac{D_{AB}}{RTZ} (P_{A1} - P_{A2}) \quad \text{یا:}$$

$$Z = Z_2 - Z_1$$

$$N_{AZ} = \frac{D_{AB} P_t}{RTZ} (y_{A1} - y_{A2}) \quad \text{یا:} \quad (12-3)$$

دستیابی به تغییرات غلظت در لایه انتقال جرم

$$N_{AZ} = J_{AZ} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dz}$$

$$N_{AZ} Z = -D_{AB} C_A + C_1$$

C_1 مقدار ثابت

$$C_A = -\frac{N_{AZ}}{D_{AB}} (Z - Z_1) + C_{A1} \quad \text{با اعمال شرط مرزی:}$$

با توجه به رابطه فوق (ثابت بودن ضریب Z)، تغییرات C_A برحسب Z کاملاً خطی است.

رابطه فوق را به صورتهای زیر نیز می‌توان نوشت:

$$y_A = -\frac{N_{AZ}}{D_{AB} C} (Z - Z_1) + y_{A1}$$

$$P_A = -\frac{N_{AZ} RT}{D_{AB}} (Z - Z_1) + P_{A1}$$