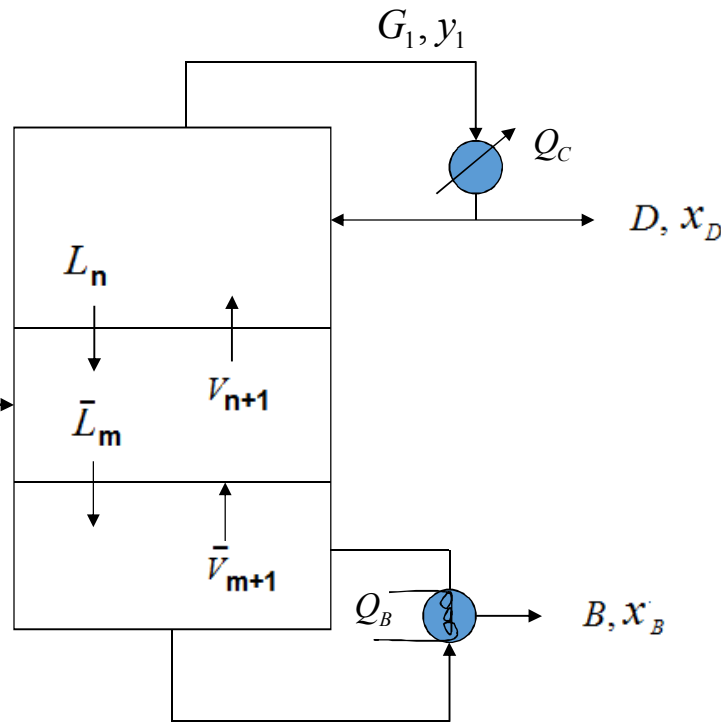


نمای کلی از یک ستون تقطیر

- مایع اشباع
- بخار اشباع
- دو فازی
- سوپر هیت
- مایع سرد

بخشی از خوراک که به شکل مایع برج وارد می شود:  $q$



- $q=1$  مایع اشباع
- $q=0$  بخار اشباع
- $0 < q < 1$  دو فازی
- $q < 0$  سوپر هیت
- $q > 1$  مایع سرد

$$\begin{aligned} l' &= \bar{L} & x_F &= z_F \\ \bar{G} &= G' & \text{or } \bar{V} &= v' \end{aligned}$$

$$l' = l + qf$$

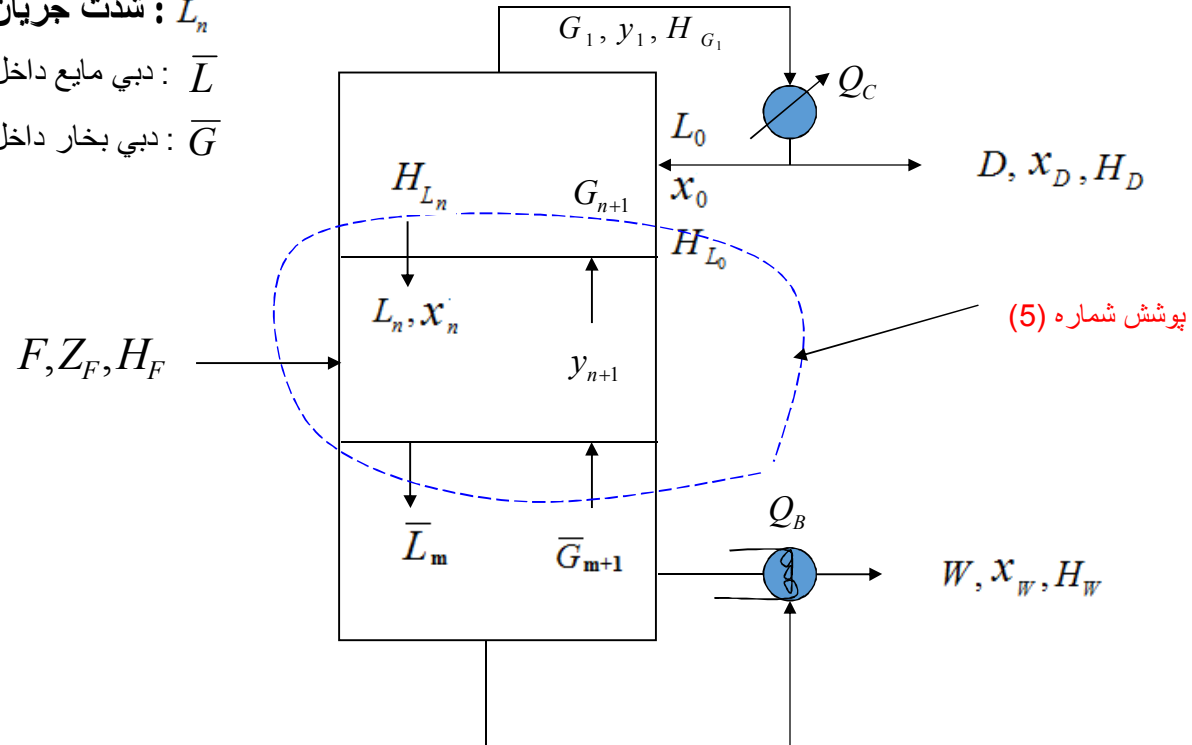
$$G = G' + (1 - q)f$$

خوراک ورودی سبب می شود که بخشی از مایع داخل برج راهم تبخیر کند  $q < 0$

خوراک ورودی سبب می شود که بخشی از بخارات داخل برج را تبدیل به مایع کند  $q > 1$

موازنه روی پوشش شماره 5 :

$L_n$  : شدت جریان مایع خروجی از سینی n  
 $\bar{L}$  : دبی مایع داخل برج  
 $\bar{G}$  : دبی بخار داخل برج



$$\begin{aligned} \ell' &= \bar{L} & x_F &= z_F \\ \bar{G} &= G' & \text{or } \bar{v} &= v' \end{aligned}$$

موازنه روی پوشش شماره 5 :

$$F + \ell + G' = G + \ell'$$

الف) موازنه کلی

$$F.x_F + \ell.x + G'.y = G.y + \ell'.x \quad *$$

ب) موازنه جزئی

$$\Rightarrow y(G' - G) = x(\ell' - \ell) - F.x_F$$

$$\ell' = \ell + qF \rightarrow \ell' - \ell = qF \quad **$$

$$G = G' + (1 - q)F \rightarrow G - G' = (1 - q)F \quad ***$$

$$(*), (**), (***) \Rightarrow -y(1 - q)F = x.q.F - F.x_F$$

$$\Rightarrow -y(1 - q) = q.x - x_F \quad \Rightarrow y = \frac{q}{q - 1}x - \frac{x_F}{q - 1}$$

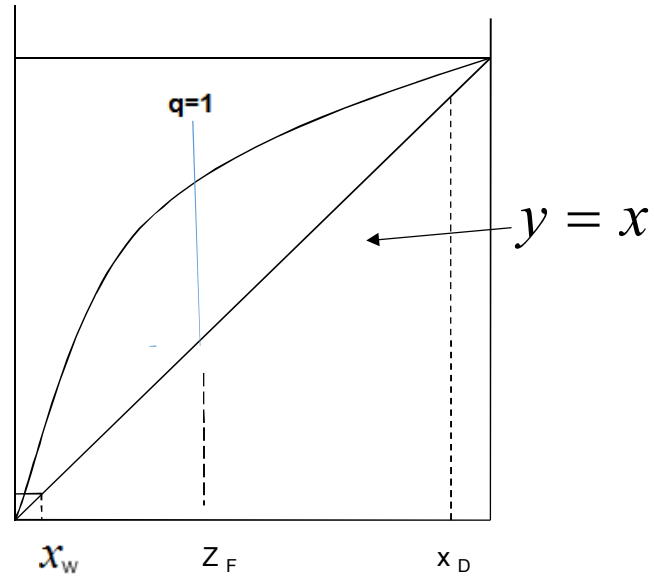
معادله خط خوراک  
Feed Line

چگونگی رسم خط خوراک در برج :

$$y = \frac{q}{q-1}x - \frac{x_F}{q-1}$$

$$x_F = Z_F$$

برای مایع اشباع  $q=1$



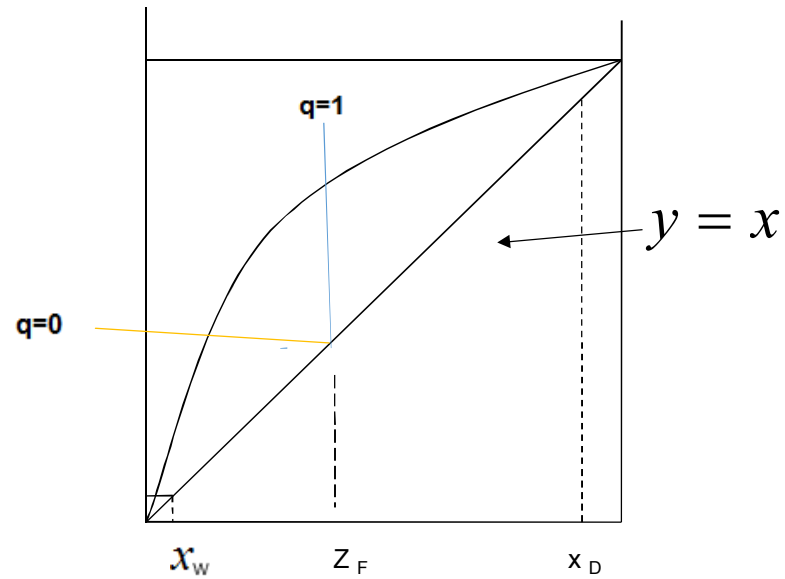
اگر خوراک به صورت مایع اشباع وارد سیستم شود (خط خوراک) به صورت قائم خواهد بود

چگونگی رسم خط خوراک در برج :

$$y = \frac{q}{q-1}x - \frac{x_F}{q-1}$$

$$x_F = Z_F$$

برای بخار اشباع  $q=0$



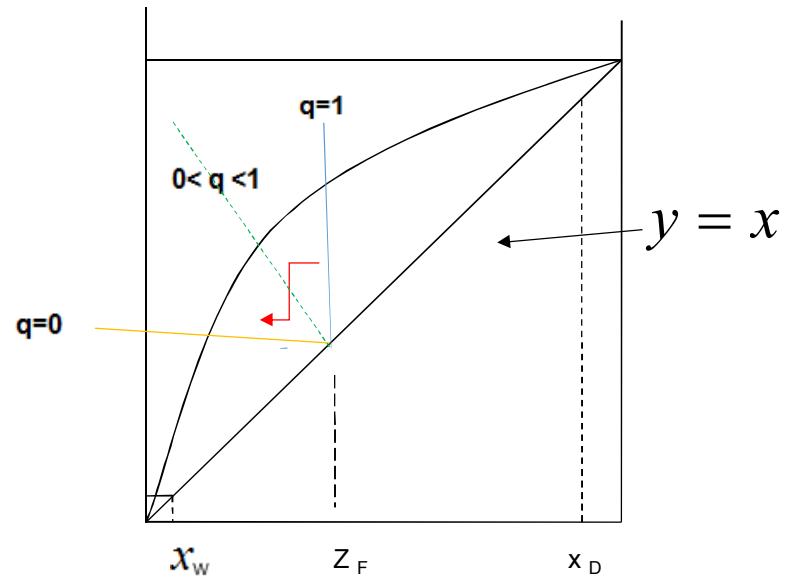
اگر خوراک به صورت بخار اشباع وارد سیستم شود (خط خوراک) به صورت افقی خواهد بود

### چگونگی رسم خط خوراک در برج :

$$y = \frac{q}{q-1}x - \frac{x_F}{q-1}$$

$$x_F = Z_F$$

برای حالت دوفازی  $0 < q < 1$



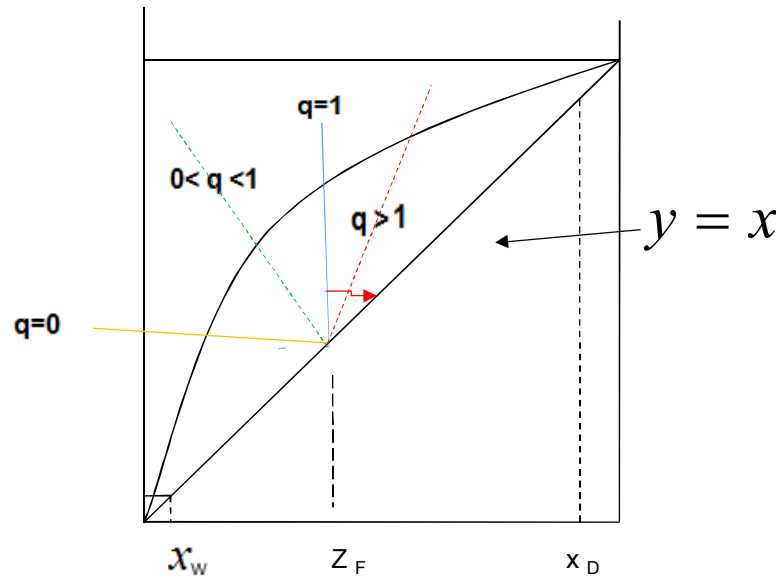
اگر خوراک به صورت مایع اشباع وارد سیستم شود (خط خوراک) به صورت قائم خواهد بود

اگر خوراک به صورت بخار اشباع وارد سیستم شود (خط خوراک) به صورت افقی خواهد بود

چگونگی رسم خط خوراک در برج :

$$y = \frac{q}{q-1}x - \frac{x_F}{q-1}$$

$$x_F = Z_F$$



برای مایعات سرد  $q > 1$

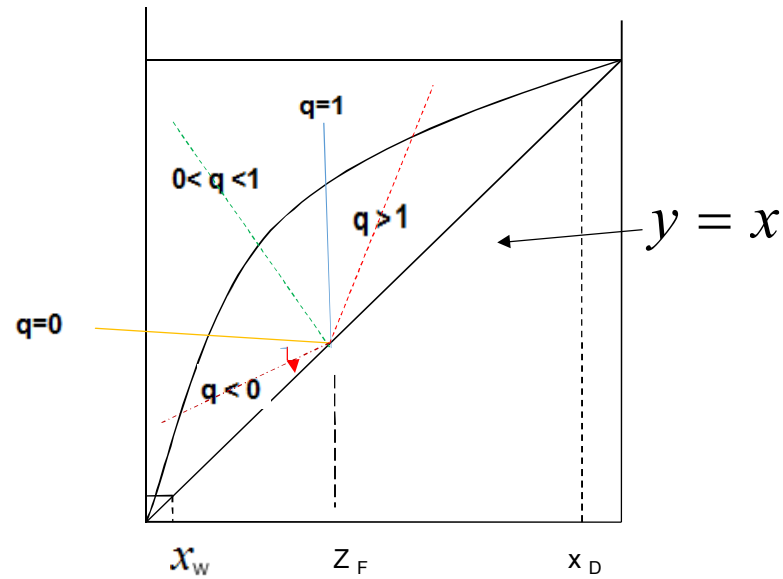
$$q = 1 + \frac{Cp_f (T_b - T_F)}{\lambda}$$

- اگر خوراک به صورت مایع اشباع وارد سیستم شود (خط خوراک) به صورت قائم خواهد بود
- اگر خوراک به صورت بخار اشباع وارد سیستم شود (خط خوراک) به صورت افقی خواهد بود
- اگر خوراک به صورت مایع سرد وارد سیستم شود (خط خوراک) بین خط 45 درجه و خط قائم خواهد بود

چگونگی رسم خط خوراک در برج :

$$y = \frac{q}{q-1}x - \frac{x_F}{q-1}$$

$$x_F = Z_F$$



برای حالت سوپرهیت  $q < 0$

$$q = \frac{-C_{P_v}(T_F - T_d)}{\lambda}$$

اگر خوراک به صورت مایع اشباع وارد سیستم شود (خط خوراک) به صورت قائم خواهد بود

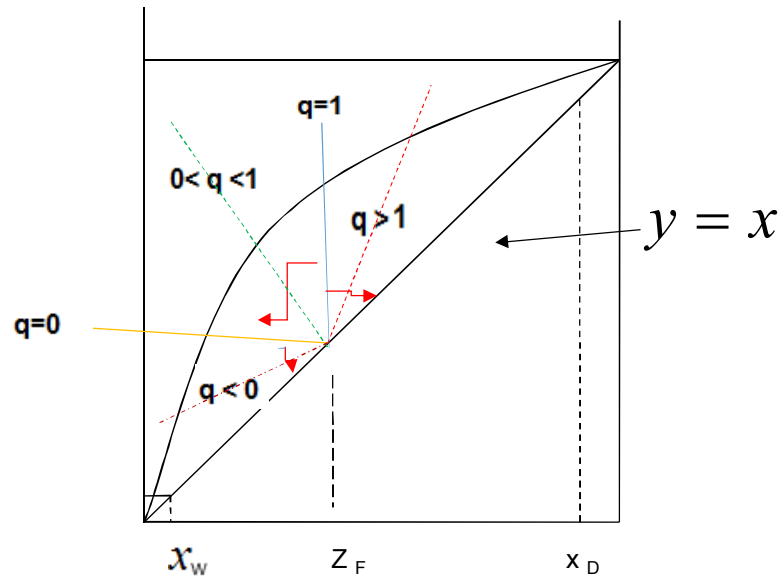
اگر خوراک به صورت بخار اشباع وارد سیستم شود (خط خوراک) به صورت افقی خواهد بود

اگر خوراک به صورت سوپرهیت وارد سیستم شود (خط خوراک) بین خط افق و خط 225 درجه خواهد بود



$$y = \frac{q}{q-1}x - \frac{x_F}{q-1}$$

$$x_F = Z_F$$



چگونگی رسم خط خوراک در برج :

برای مایعات سرد  $q > 1$

$$q = 1 + \frac{C_{p_l}(T_b - T_F)}{\lambda}$$

برای حالت سوپرهیت  $q < 0$

$$q = \frac{-C_{p_v}(T_F - T_d)}{\lambda}$$

اگر خوراک به صورت مایع اشباع وارد سیستم شود (خط خوراک) به صورت قائم خواهد بود

اگر خوراک به صورت بخار اشباع وارد سیستم شود (خط خوراک) به صورت افقی خواهد بود

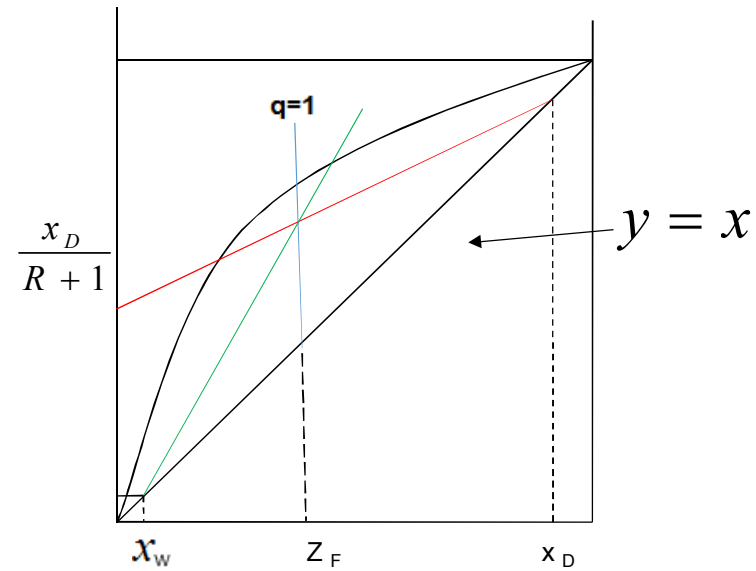
با توجه به مشخص بودن  $\alpha_f$  در خوراک ورودی جایگاه آن را در روی محور X ها مشخص می کنیم. سپس از نقطه  $\alpha_f$  خطی موازی با محور Y ها رسم می کنیم تا خط ۴۵ درجه را قطع نماید. از محل تقاطع این خط با خط ۴۵ درجه، خطی رسم می کنیم تا از محل خط تقاطع خط کار پایین و خط کار بالا عبور نماید. خطی که از این نقطه عبور نموده به عنوان **خط خوراک** نامیده می شود. می دانیم که مکان هندسی خط کار بالا و خط کار پایین و خط خوراک از یک نقطه عبور می کند. برای بدست آوردن معادله خط خوراک موازنه را در قسمت میانی، پوشش شماره ۵ برج می نویسیم.

چگونگی رسم خطوط کاردر برج :

$$y = \frac{q}{q-1}x - \frac{x_F}{q-1}$$

$$x_F = Z_F$$

برای مایع اشباع  $q=1$



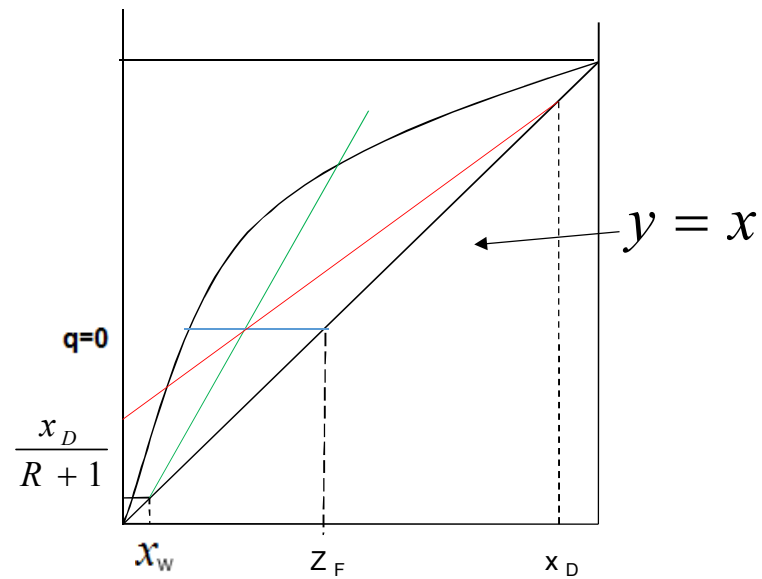
اگر خوراک به صورت مایع اشباع وارد سیستم شود (خط خوراک) به صورت قائم خواهد بود

چگونگی رسم خطوط کاردر برج :

$$y = \frac{q}{q-1}x - \frac{x_F}{q-1}$$

$$x_F = z_F$$

برای بخار اشباع  $q=0$



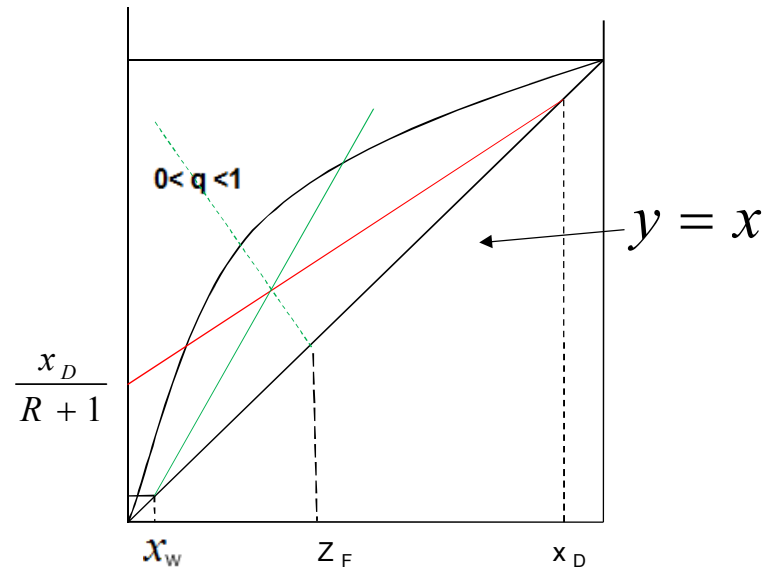
اگر خوراک به صورت بخار اشباع وارد سیستم شود (خط خوراک) به صورت افقی خواهد بود

چگونگی رسم خطوط کاردر برج :

$$y = \frac{q}{q-1}x - \frac{x_F}{q-1}$$

$$x_F = Z_F$$

برای حالت دوفازی  $0 < q < 1$



اگر خوراک به صورت مایع اشباع وارد سیستم شود (خط خوراک) به صورت قائم خواهد بود

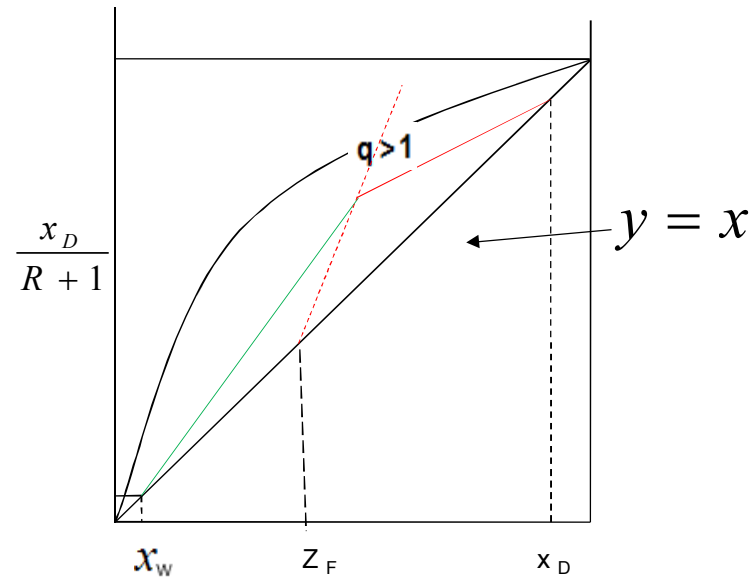
اگر خوراک به صورت بخار اشباع وارد سیستم شود (خط خوراک) به صورت افقی خواهد بود

اگر خوراک به صورت دو فازی وارد سیستم شود (خط خوراک) بین خط افقی و خط قائم خواهد بود

چگونگی رسم خطوط کاردر برج :

$$y = \frac{q}{q-1}x - \frac{x_F}{q-1}$$

$$x_F = Z_F$$



برای مایعات سرد  $q > 1$

$$q = 1 + \frac{Cp_f (T_b - T_F)}{\lambda}$$

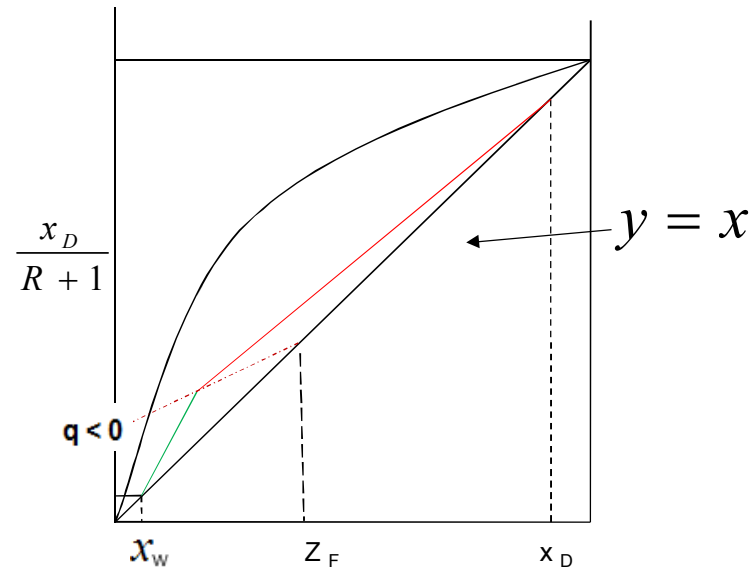
اگر خوراک به صورت مایع اشباع وارد سیستم شود (خط خوراک) به صورت قائم خواهد بود

اگر خوراک به صورت مایع سرد وارد سیستم شود (خط خوراک) بین خط 45 درجه و خط قائم خواهد بود

چگونگی رسم خطوط کاردر برج :

$$y = \frac{q}{q-1}x - \frac{x_F}{q-1}$$

$$x_F = Z_F$$



برای حالت سوپرهیت  $q < 0$

$$q = \frac{-c_{p_v}(T_F - T_d)}{\lambda}$$

اگر خوراک به صورت مایع اشباع وارد سیستم شود (خط خوراک) به صورت قائم خواهد بود

اگر خوراک به صورت بخار اشباع وارد سیستم شود (خط خوراک) به صورت افقی خواهد بود

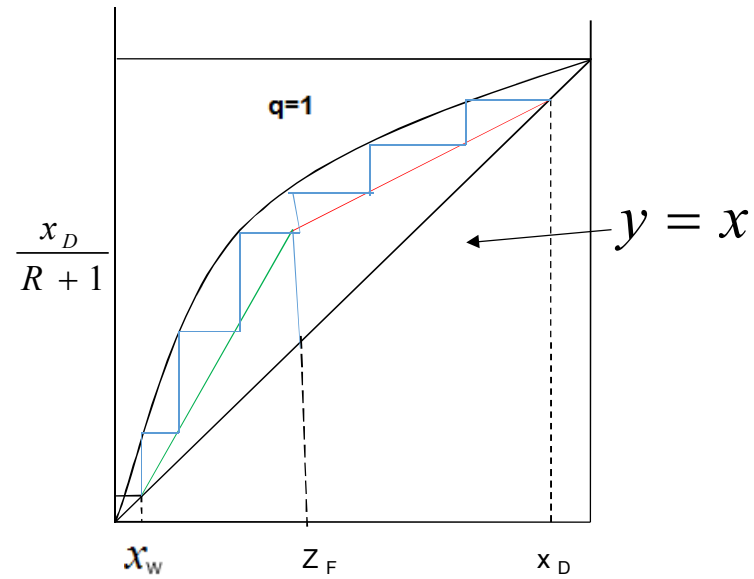
اگر خوراک به صورت سوپرهیت وارد سیستم شود (خط خوراک) بین خط افق و خط 225 درجه خواهد بود

چگونگی رسم خطوط کار در برج :

$$y = \frac{q}{q-1}x - \frac{x_F}{q-1}$$

$$x_F = Z_F$$

برای مایع اشباع  $q=1$

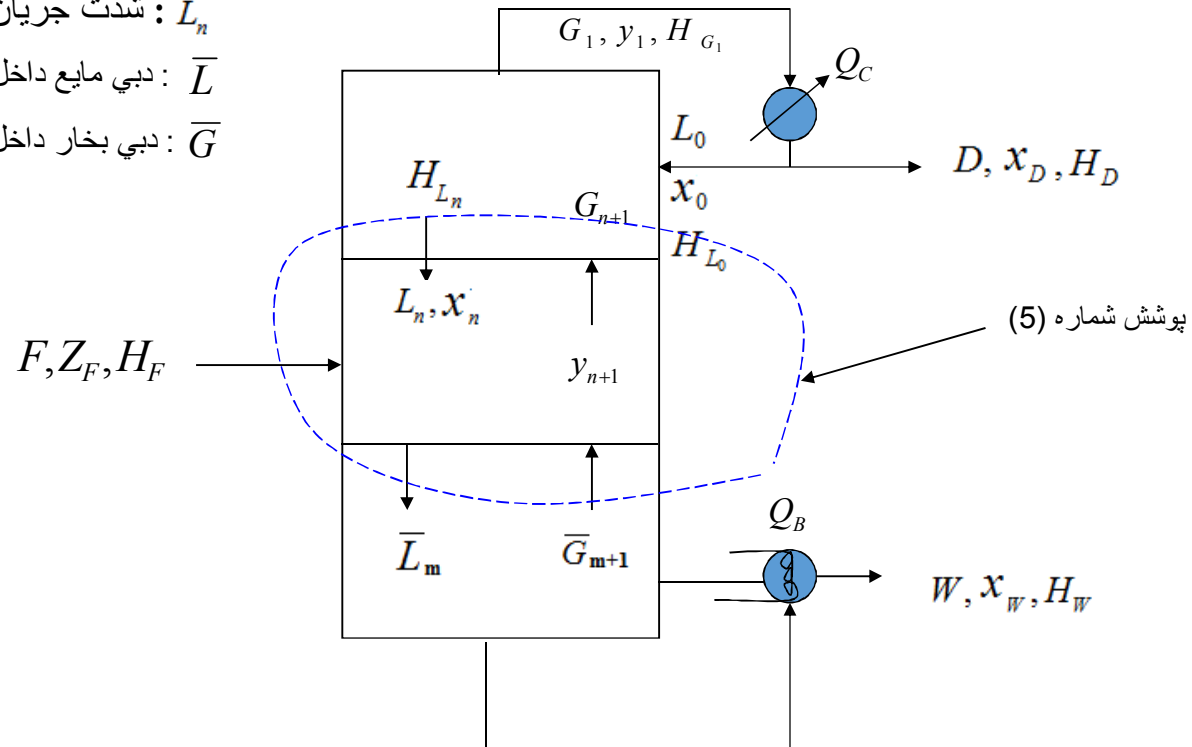


اگر خوراک به صورت مایع اشباع وارد سیستم شود (خط خوراک) به صورت قائم خواهد بود



چگونگی محاسبه q در برج :

$L_n$  : شدت جریان مایع خروجی از سینی n  
 $\bar{L}$  : دبی مایع داخل برج  
 $\bar{G}$  : دبی بخار داخل برج



$$\begin{aligned} \ell' &= \bar{L} & x_F &= z_F \\ \bar{G} &= G' & \text{or } \bar{v} &= v' \end{aligned}$$

$$\text{موازنه کلی : } F + G' + \ell = G + \ell'$$

$$FH_F + G'H_{G'_{K+1}} + \ell H_{\ell_{K+1}} = GH_{GK} + \ell'H_{\ell'K}$$

$$H_{G'_{K+1}} = H_{GK} = H_G$$

$$FH_F + G'H_G + \ell H_\ell = GH_G + \ell'H_\ell$$

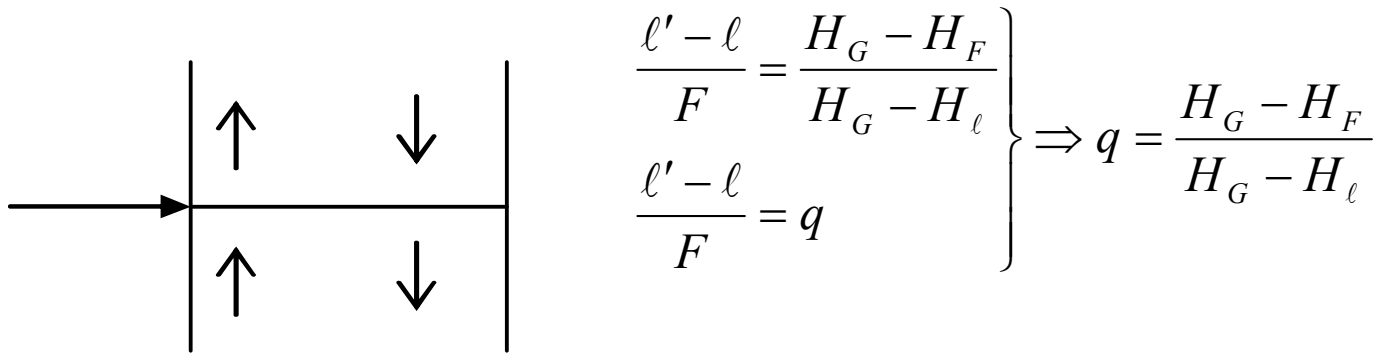
از طرفی می دانیم

$$(G' - G) = (\ell' - \ell) - F$$

$$FH_F + [(\ell' - \ell) - F]H_G = (\ell' - \ell)H_\ell \Rightarrow$$

$$FH_F - FH_G + (\ell' - \ell)H_G = (\ell' - \ell)H_\ell$$

$$\Rightarrow F(H_F - H_G) = (\ell' - \ell)(H_\ell - H_G)$$



$$\left. \begin{array}{l} \frac{\ell' - \ell}{F} = \frac{H_G - H_F}{H_G - H_\ell} \\ \frac{\ell' - \ell}{F} = q \end{array} \right\} \Rightarrow q = \frac{H_G - H_F}{H_G - H_\ell}$$

### مثال:

یک برج تقطیر مداوم سینی دار جهت جداسازی  $30000 \text{ lb/hr}$  مخلوطی شامل ۴۰٪ وزنی بنزن و ۶۰٪ وزنی تولوئن و یک محصول شامل ۹۷٪ وزنی بنزن و محصول پایینی شامل ۲٪ وزنی بنزن طراحی شده. مقدار برگشتی ۳.۵ مول مایع برگشتی به ازای هر مول محصول بالای برج می باشد. مقدار گرمای نهان تبخیر بنزن  $7360 \text{ cal/gml}$  و برای تولوئن  $7960 \text{ cal/gml}$  می باشد. بنزن و تولوئن تشکیل یک مخلوط ایده آل با ضریب جداسازی ۲.۵ می دهند. نقطه جوش خوراک در  $1 \text{ atm}$  برابر ۹۵ درجه سانتیگراد است. مطلوبست تعداد مولهای محصول بالا و پایین برج و تعداد سینی ها و موقعیت سینی خوراک در صورتی که:

1) خوراک به صورت مایع و در دمای نقطه جوش باشد.

2) اگر خوراک به صورت مایع و در دمای  $20^{\circ}\text{C}$  باشد و ظرفیت حرارتی آن  $0.44 \left( \frac{\text{cal}}{\text{g}\cdot\text{C}^{\circ}} \right)$  باشد.

3) اگر خوراک به صورت مخلوطی از  $\frac{2}{3}$  بخار (مولی) و  $\frac{1}{3}$  مولی مایع باشد.

موازنه کلی :  $F = D + W$

موازنه جزئی روی بنزن :  $F.x_F = D.x_D + W.x_W$   $x_F = z_F$

$$x_F = \frac{\frac{30000 \times 0.4}{78}}{\frac{30000 \times 0.4}{78} + \frac{30000 \times 0.6}{92}} = 0.44 \quad \text{درصد مولی}$$

$$x_W = \frac{\frac{2}{78}}{\frac{2}{78} + \frac{98}{92}} = 0.0235 \quad x_D = \frac{\frac{97}{78}}{\frac{97}{78} + \frac{3}{92}} = 0.974$$

$$(MW)_{ave} = 0.44 \times 78 + 0.56 \times 92 = 85.8$$

$$F = \frac{30000}{85.5} = 350 \text{ lbmol/hr}$$

موازنه کلی :  $F = D + W \Rightarrow 350 = -D + W$

موازنه جزئی :

$$F.x_F = D.x_D + W.x_W \Rightarrow 350 \times 0.44 = D \times 0.974 + W \times 0.023$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D = 153.4 \text{ lbmol/hr} \\ W = 196.6 \text{ lbmol/hr} \end{cases}$$

$$y = \frac{\alpha x}{1 + (\alpha - 1)x} \Rightarrow y = \frac{2.5x}{1 + 1.5x}$$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	0	0.217	0.385	0.517	0.625	0.714	0.789	0.854	0.909	0.957	1

معادله خط کار بالا:

$$y = \frac{R}{R+1}x + \frac{x_D}{R+1}$$

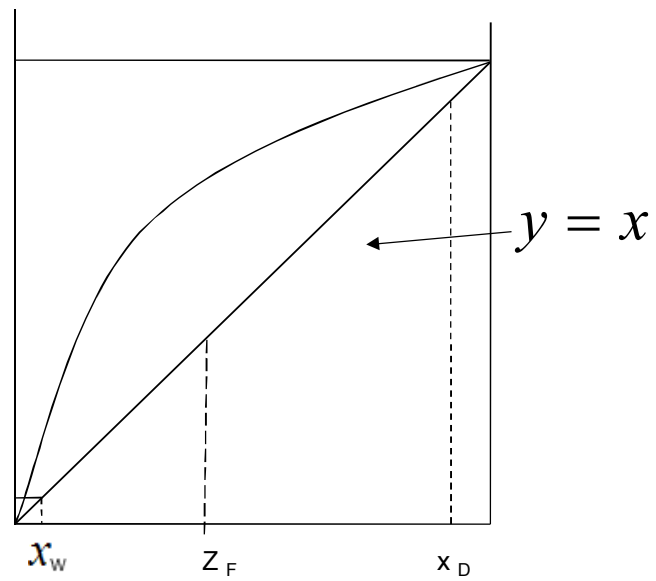
عرض از مبدأ:

$$\frac{x_D}{R+1} = \frac{0.974}{3.5+1} = 0.216$$

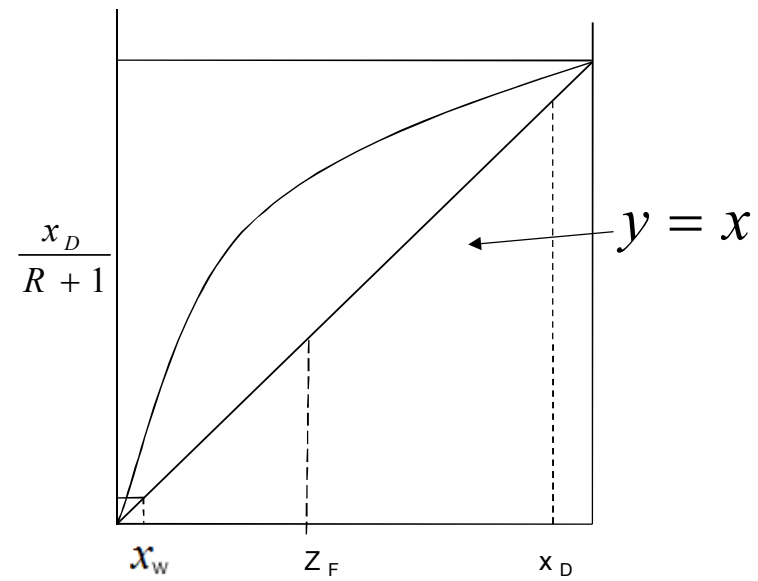
(1) اگر خوراک به صورت مایع و دردمای نقطه جوش خود باشد.



چگونگی رسم نمودار تعادلی:

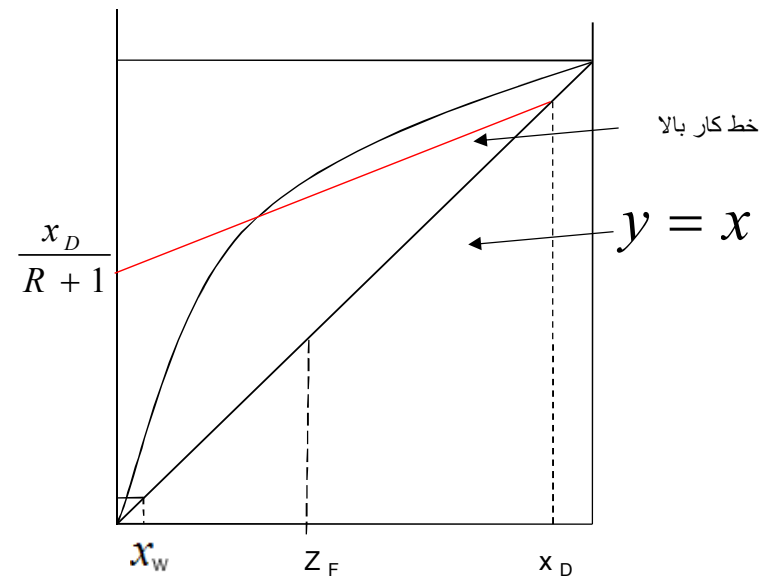


چگونگی رسم نمودار تعادلی:



$$y_{n+1} = \frac{R}{R+1} \cdot x_n + \frac{x_D}{R+1}$$

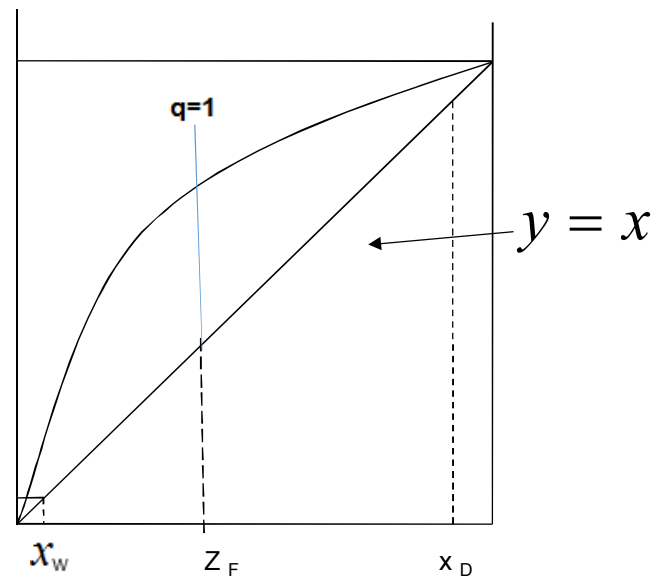
چگونگی رسم خط کار بالای برج :



چگونگی رسم خط خوراک در برج :

$$y = \frac{q}{q-1}x - \frac{x_F}{q-1}$$

$$x_F = Z_F$$



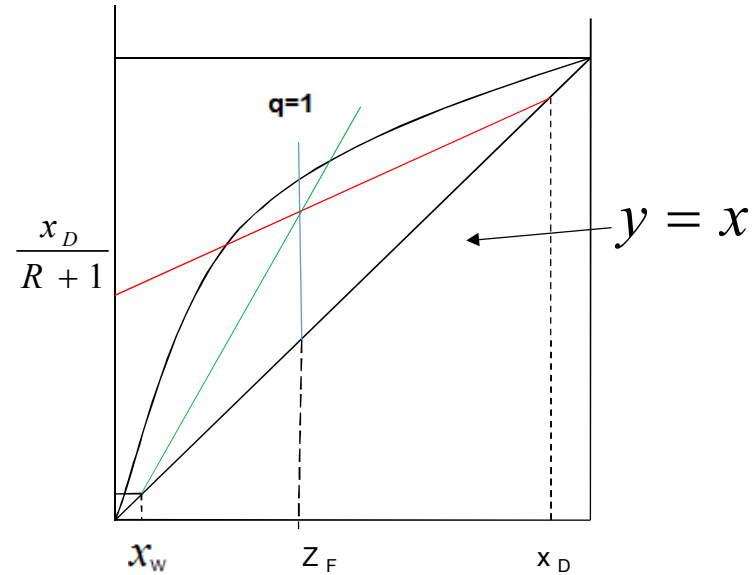
اگر خوراک به صورت مایع اشباع وارد سیستم شود (خط خوراک) به صورت قائم خواهد بود

چگونگی رسم خطوط کاردر برج :

$$y_{n+1} = \frac{R}{R+1} \cdot x_n + \frac{x_D}{R+1}$$

$$y = \frac{q}{q-1} x - \frac{x_F}{q-1}$$

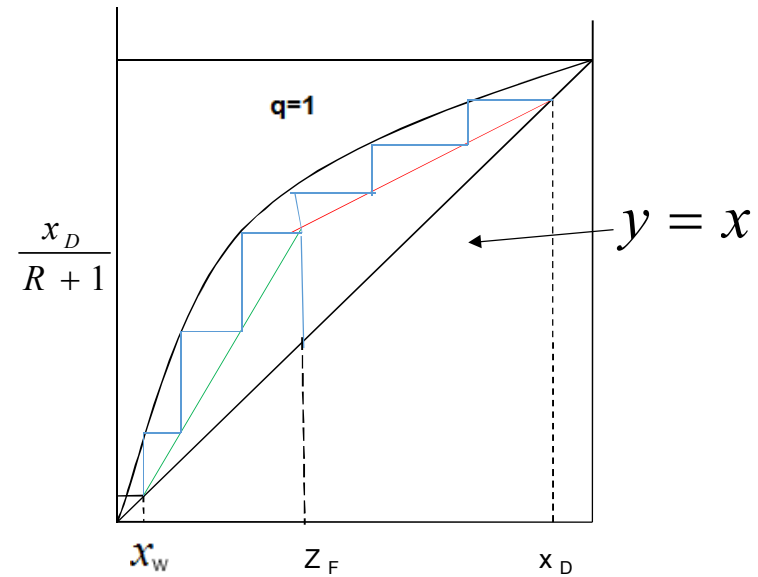
$$y_{m+1} = \frac{\ell'}{\ell' - W} \cdot x_m - \frac{W \cdot x_W}{\ell' - W}$$



اگر خوراک به صورت مایع اشباع وارد سیستم شود (خط خوراک) به صورت قائم خواهد بود

$$\begin{aligned} \ell' &= \bar{L} & x_F &= Z_F \\ \bar{G} &= G' & \text{or } \bar{V} &= V' \end{aligned}$$

چگونگی رسم سینی ها در برج :



تعداد سینی ها 12 تا و خوراک بالای سینی 7 وارد می شود و یک سینی مربوط به ریویولر است.

(2) اگر خوراک به صورت مایع و در دمای 20 درجه سانتیگراد باشد

$$\lambda_{ave} = \lambda_A x_A + \lambda_B (1 - x_A) = 7360(0.44) + 7690(0.56) = 7696 \text{ cal/gmol}$$

$$\Rightarrow q = \frac{0.44 \text{ cal/gmol} \cdot c^0 (95 - 20)}{7696 \text{ cal/gmol} \times \frac{1 \text{ gmol}}{85.8 \text{ gr}}} = 1.37$$

$$\text{شیب خط خوراک} = \frac{q}{q-1} = \frac{1.37}{1.37-1} = 3.7$$

$$\text{tg}^{-1} 3.7 \approx 75$$

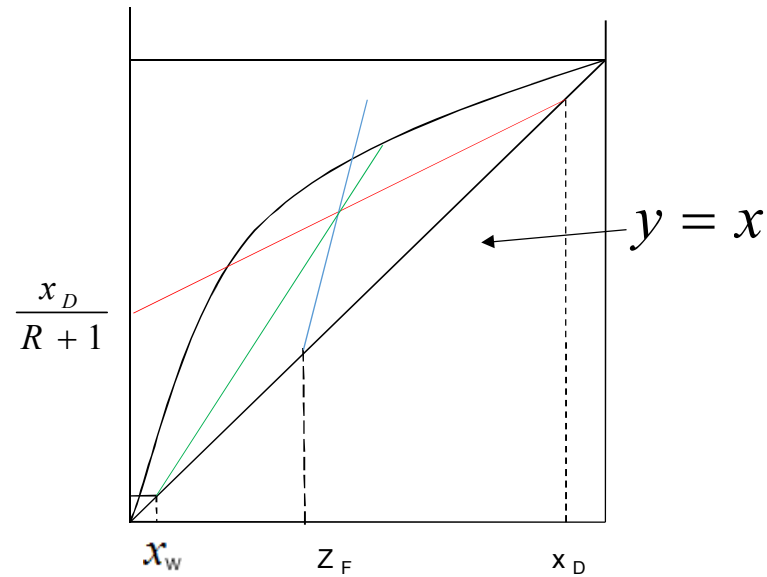
خطی به شیب ۷۵ درجه باید رسم کنیم

چگونگی رسم خطوط کاردر برج :

$$y_{n+1} = \frac{R}{R+1} \cdot x_n + \frac{x_D}{R+1}$$

$$y = \frac{q}{q-1} x - \frac{x_F}{q-1}$$

$$y_{m+1} = \frac{l'}{l' - W} \cdot x_m - \frac{W \cdot x_W}{l' - W}$$

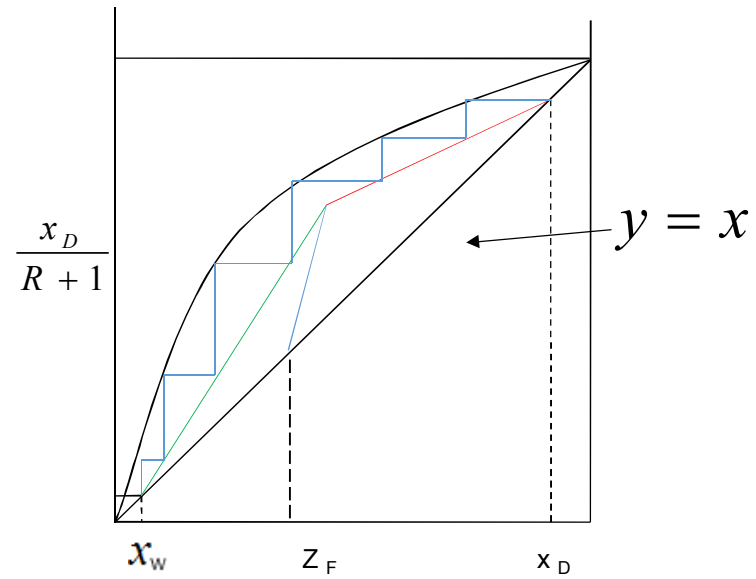


خطی خوراک به شیب 75 درجه رسم شده

$$\begin{aligned} l' &= \bar{L} & x_F &= Z_F \\ \bar{G} &= G' & \text{or } \bar{V} &= V' \end{aligned}$$



چگونگی رسم سینی ها در برج :



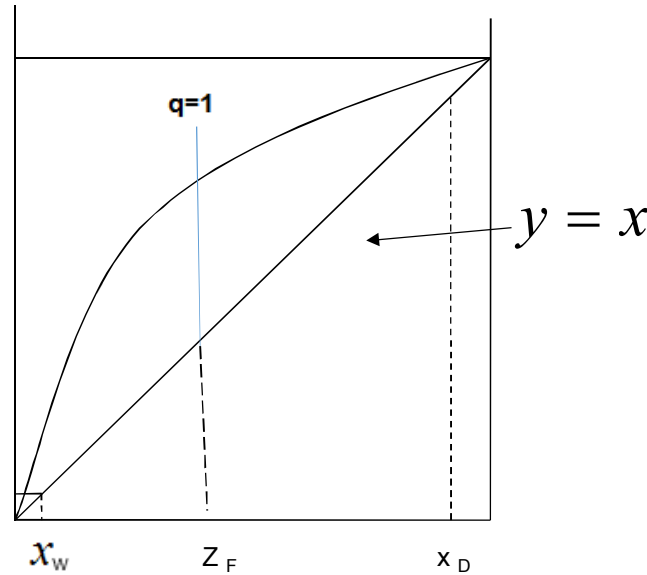
خطی خوراک به شیب 75 درجه رسم شده

تعداد سینی ها به 11 تا رسید که یکی مربوط به ریویولر می شود و خوراک بین سینی 5 و 6 وارد می شود .

چگونگی رسم خط خوراک در برج :

$$y = \frac{q}{q-1}x - \frac{x_F}{q-1}$$

$$x_F = Z_F$$



برای مایعات سرد  $q > 1$

$$q = 1 + \frac{C_{p_l}(T_b - T_F)}{\lambda}$$

برای حالت سوپرهیت  $q < 0$

$$q = \frac{-C_{p_v}(T_F - T_d)}{\lambda}$$

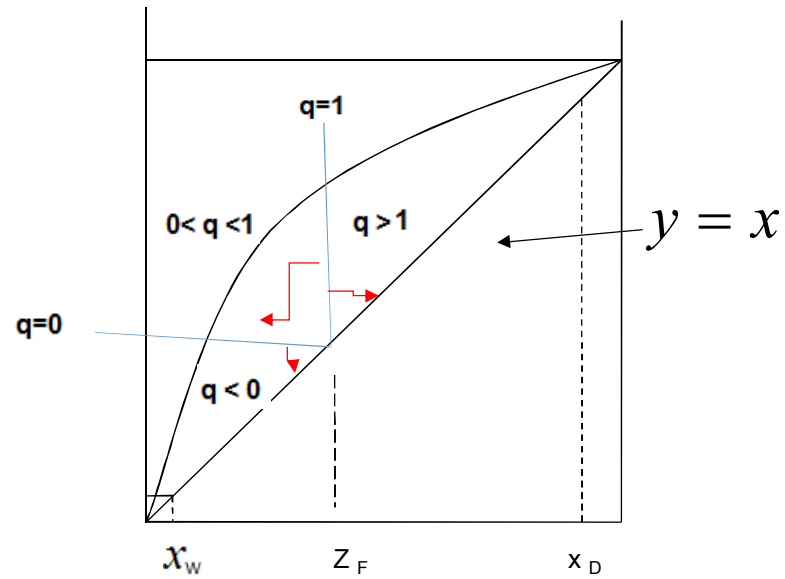
اگر خوراک به صورت مایع اشباع وارد سیستم شود (خط خوراک) به صورت قائم خواهد بود

اگر خوراک به صورت بخار اشباع وارد سیستم شود (خط خوراک) به صورت افقی خواهد بود

چگونگی رسم خط خوراک در برج :

$$y = \frac{q}{q-1}x - \frac{x_F}{q-1}$$

$$x_F = Z_F$$



اگر خوراک به صورت مایع اشباع وارد سیستم شود (خط خوراک) به صورت قائم خواهد بود

(ج)

$$\text{slope} = \frac{q}{q-1} = \frac{1/3}{1/3-1} = -0.5$$

اگر قرار باشد تمام محصولی total Reflux می خواهیم بگیریم رابه داخل برج برگردانیم جریان برگشتی می شود. چون که در این صورت خط کارروی خط  $D=0$  خواهد بود چون

$$R = \frac{\ell_0}{D} = \infty$$

$$\text{slope} = \frac{q}{q-1} = \frac{1/3}{1/3-1} = -0.5$$

که در این صورت خط کارروی خط خواهد بود چون وقتی خط کاربالا و پایین روی هم منطبق شوند

$$N_{\min} + 1 = \frac{\log \left[ \frac{x_D}{1-x_D} \right] \left[ \frac{(1-x_W)}{x_W} \right]}{\log \alpha_{ave}}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R}{R+1} = 1$$

اگر قرار باشد تمام محصولی total Reflux می خواهیم بگیریم رابه داخل برج برگردانیم جریان برگشتی می شود. چون

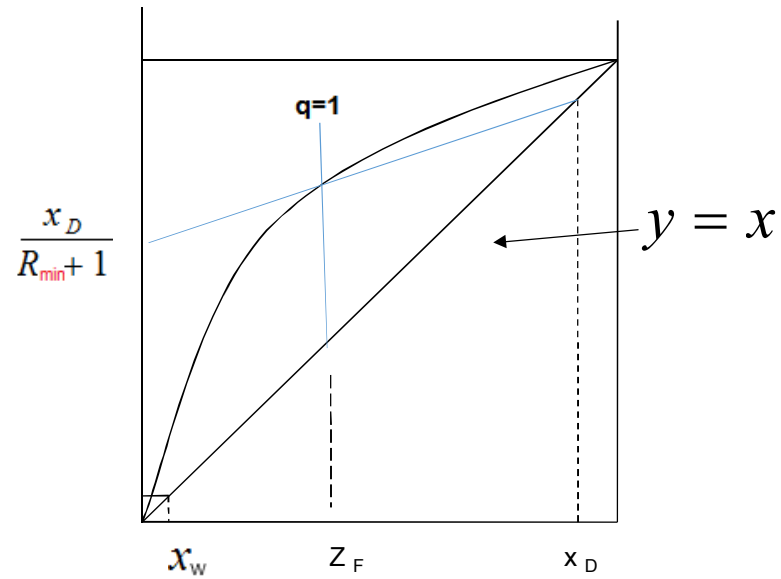
$$y_{n+1} = \frac{R}{R+1} x_n + \frac{x_D}{R+1} \leftarrow$$

معادله خط کاربالا

باتوجه به عرض از مبدأ خط کارپایین را رسم کرده و از آن تعداد پلکانها را رسم می کنیم باید ۱۴ تا پلکان شود (یکی مربوط به ریویلاست).

چگونگی محاسبه حداقل جریان برگشتی در برج :

$$y = \frac{q}{q-1}x - \frac{x_F}{q-1}$$
$$x_F = Z_F$$



اگر خوراک به صورت مایع اشباع وارد سیستم شود (خط خوراک) به صورت قائم خواهد بود

## جریان برگشتی حداقل

درحالتی که مقدار برگشتی، از جریان برگشتی کامل کمتر باشد تعداد سینی ها بیشتر خواهد شد و هرچه در مایع برگشتی کمتر شود تعداد سینی های مورد نیاز افزایش پیدا می کند. درحالتی که مقدار جریان برگشتی بینهایت کم می شود. (  $\frac{\ell_0}{D} \rightarrow \infty$  ) جریان برگشتی را، جریان برگشتی حداقل گوئیم و تعداد سینی ها بی نهایت می شود .

$$\left(\frac{\ell}{D}\right)_{\min} < \frac{\ell_0}{D} < \infty$$

$$R_{opt} = \beta R_{min}$$

$$1.2 < \beta \leq 2$$

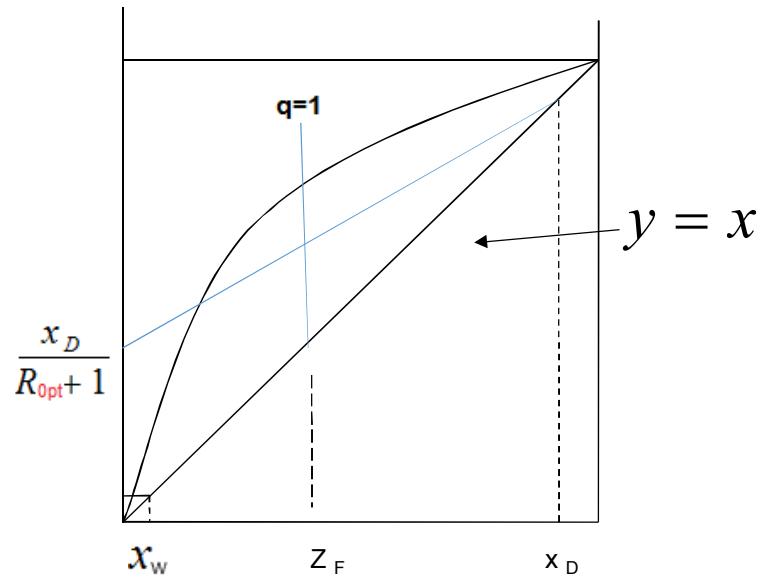
جریان برگشتی اپتیمم (بهینه) بین مقدار حداقل و مقدار بی نهایت می باشد که بسته به نوع هر سیستم و خصوصیات حاکم بر آن مقدارش متفاوت می باشد .

چگونگی محاسبه جریان برگشتی بهینه در برج :

$$y_{n+1} = \frac{R}{R+1} \cdot x_n + \frac{x_D}{R+1}$$

$$y = \frac{q}{q-1} x - \frac{x_F}{q-1}$$

$$x_F = Z_F$$



$$R_{opt} = \beta R_{min}$$

اگر خوراک به صورت مایع اشباع وارد سیستم شود (خط خوراک) به صورت قائم خواهد بود

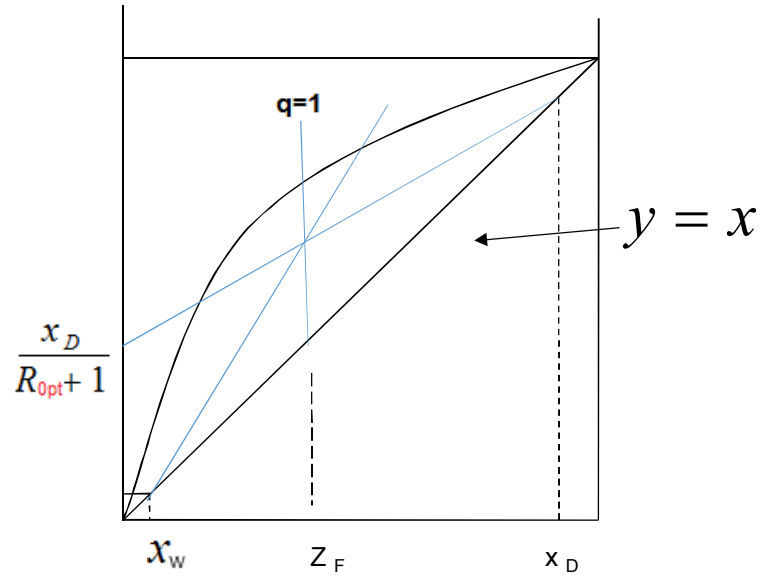
چگونگی محاسبه جریان برگشتی بهینه در برج :

$$y_{n+1} = \frac{R}{R+1} \cdot x_n + \frac{x_D}{R+1}$$

$$y = \frac{q}{q-1} x - \frac{x_F}{q-1}$$

$$y_{m+1} = \frac{\ell'}{\ell' - W} \cdot x_m - \frac{W \cdot x_W}{\ell' - W}$$

$$\begin{aligned} \ell' &= \bar{L} & x_F &= Z_F \\ \bar{G} &= G' & \text{or } \bar{V} &= V' \end{aligned}$$



$$R_{opt} = \beta R_{min}$$

اگر خوراک به صورت مایع اشباع وارد سیستم شود (خط خوراک) به صورت قائم خواهد بود



در حالتی که مقدار جریان برگشتی از جریان برگشتی کامل کمتر باشد تعداد سینی ها بیشتر خواهد شد و هر هر چقدر مایع برگشتی کمتر شود تعداد سینی مورد نیاز افزایش می یابد در حالی که مقدار جریان برگشتی بی نهایت کم شود  $\frac{l_0}{D} \rightarrow \infty$  جریان برگشتی را جریان برگشتی حداقل می گوئیم و تعداد سینی ها بی نهایت است . جریان برگشتی بهینه بین مقدار حداقل و مقدار بی نهایت می باشد .

چگونگی محاسبه حداقل جریان برگشتی به صورت تحلیلی:

$$y = \frac{R}{R+1}x + \frac{x_D}{R+1}$$

&

$$y = \frac{q}{q-1}x - \frac{z_f}{q-1}$$

$$x_F = z_F$$

$$\alpha = \frac{x(1-y)}{y(1-x)}$$

$$\Rightarrow \frac{q}{q-1}x - \frac{z_f}{q-1} = \frac{R}{R+1}x + \frac{x_D}{R+1}$$

چگونگی محاسبه حداقل جریان برگشتی به صورت تحلیلی:

$$\Rightarrow x \left( \frac{R}{R+1} - \frac{q}{q-1} \right) = \frac{-x_D}{R+1} - \frac{Z_f}{q-1} \quad x_F = Z_F$$

$$\Rightarrow x[R(q-1) - q(R+1)] = -(q-1)x_D - Z_f(R+1)$$

$$\Rightarrow x(Rq - R - qR - q) = -(q-1)x_D - Z_f(R+1)$$

$$\Rightarrow -x(R+q) = -[(q-1)x_D + Z_f(R+1)]$$

$$\Rightarrow x = \frac{z_f(R+1) + x_D(q-1)}{R+q}$$

چگونگی محاسبه حداقل جریان برگشتی به صورت تحلیلی:

$$x_F = z_F$$

$$y = \frac{R}{R+1} \left[ \frac{z_f(R+1) + x_D(q-1)}{R+q} \right] + \frac{x_D}{R+1}$$

$$= \frac{R(R+1)z_f + Rx_D(q-1) + Rx_D + qx_D}{(R+1)(R+q)}$$

$$\Rightarrow y = \frac{Rz_f + qx_D}{R+q}$$

چگونگی محاسبه حداقل جریان برگشتی به صورت تحلیلی:

$$\alpha = \frac{x(1-y)}{y(1-x)} = \frac{\left[ \frac{z_f(R+1) + x_D(q-1)}{R+q} \right] \left[ 1 - \frac{Rz_f + qx_D}{R+q} \right]}{\frac{Rz_f + qx_D}{R+q} \left( 1 - \frac{z_f(R+1) + x_D(q-1)}{R+q} \right)}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{[z_f(R+1) + x_D(q-1)][R(1-z_f) + q(1-x_D)]}{(Rz_f + qx_D)[(R+1)(1-z_f) + (q-1)(1-x_D)]}$$

چگونگی محاسبه حداقل جریان برگشتی به صورت تحلیلی:

$$x_F = z_F$$

$$\text{IF } q = 1 \rightarrow R_{\min} = \frac{1}{\alpha - 1} \left[ \frac{x_D}{x_f} - \frac{\alpha(1-x_D)}{1-x_f} \right]$$

$$\text{IF } q = 0 \rightarrow R_{\min} = \frac{1}{\alpha - 1} \left[ \frac{\alpha x_D}{y_f} - \frac{(1-x_D)}{1-x_f} \right] - 1$$