

فصل سوم

ضرایب انتقال جرم

در حرکت درهم ، برخلاف حرکت آرام ، حرکات ذرات مایع نامنظم بوده ، قطعات بزرگ و کوچکی از سیال به نام چرخانه دارای حرکات سریع و نامنظم در جهات مختلف می باشند.

با توجه به سرعت زیاد چرخانه ها ، می توان انتظار داشت که انتقال جرم در ناحیه ای که دارای حرکت درهم است بسیار سریع و مکانیزم آن در مقایسه با مکانیزم انتقال جرم در یک محیط آرام ، که تنها شامل نفوذ مولکولی است ، کاملاً متفاوت باشد. به همین علت گرادیان غلظت در قسمتی که سیال دارای حرکت درهم است به مراتب کمتر از گرادیان غلظت در یک حرکت آرام است .

ضرایب انتقال جرم

برای پیش بینی شدت انتقال جرم از همان روابطی که برای نفوذ مولکولی در سیالات بدست آمده اند استفاده می گردد، با این تفاوت که در این روابط به جای ضریبی که محتوی ضریب نفوذ مولکولی است، ضریب دیگری به نام ضریب انتقال جرم گنجانده می شود. بدیهی است که در استفاده از ضریب انتقال جرم فرض بر این است که این ضریب شامل تمام اثرات وجود چرخانه ها در شدت انتقال جرم می باشد. در معادله کلی انتقال جرم به جای مجموعه $D_{AB}C/Z$ که مشخص کننده مکانیزم نفوذ مولکولی است، از ضریب انتقال جرمی که با F نشان داده می شود استفاده می گردد.

$$N_{AZ} = \frac{N_{AZ}}{N_{AZ} + N_{BZ}} \cdot F \cdot \ln \left[\frac{\frac{N_{AZ}}{(N_{AZ} + N_{BZ})} - \frac{C_{A_2}}{C}}{\frac{N_{AZ}}{(N_{AZ} + N_{BZ})} - \frac{C_{A_1}}{C}} \right]$$

در اینجا نیز نسبت $\frac{N_{AZ}}{N_{AZ} + N_{BZ}}$ با توجه به شرایط فیزیکی موجود تعیین می گردد.

بنابر تعریف، شار N برابر با مقدار انتقال جرم به ازای واحد سطحی است که معمولاً عمود بر مسیر نفوذ اجزای می باشد. گاهی اتفاق می افتد انتقال جرم از یک سطح غیر مستوی انجام می گیرد. در این صورت مساحت عمود بر مسیر نفوذ مولکولها ثابت نبوده، با تغییر فاصله از سطح جسم غیر مستوی تغییر می نماید. در این حالت با وجود ثابت بودن مقدار انتقال جرم، شار N ، در نتیجه ضریب انتقال جرم F در سطوح مختلف، متفاوت خواهد بود.

ضریب F یک ضریب انتقال جرم موضعی است که برای نقطه معینی در روی فصل مشترک دو فاز تعریف می شود. از آنجا که F تابع ویژگیها و نحوه حرکت فازها در فصل مشترک است، ثابت نبوده بلکه در امتداد فصل مشترک تغییر می کند. بدین جهت در برخی از موارد می توان به جای F از مقدار متوسط آن یعنی F_M استفاده کرد.

در انتقال جرم در مخلوط های دو جزئی، با توجه به شدت انتقال هر جزء نسبت به جزء دیگر، دو حالت مختلف غالباً مورد نظر قرار می گیرد. یکی از این دو حالت انتقال یک جزء به درون یک محیط ساکن و حالت دیگر انتقال متقابل اجزاء با شدت مولی مساوی است. در این دو حالت، برای بیان مقدار انتقال جرم می توان به جای F از ضرایب انتقال جرم ویژه استفاده نمود.

(نیروی محرکه) (ضریب انتقال جرم) = شار

حالات زیر نمونه هایی از ضرایب انتقال جرم که استفاده از آنها متداول می باشد، تعریف می شود. در حالت اول انتقال جزء A بدرون جزء ساکن B ($N_B=0$)، ضرایب انتقال جرم در فاز گاز و یا در فاز مایع طبق روابط زیر تعریف می شود.

$$N_{AZ} = k_G(P_{A_1} - P_{A_2}) = k_y(y_{A_1} - y_{A_2}) = k_c(c_{A_1} - c_{A_2}) = k_x(x_{A_1} - x_{A_2}) = k_L(c_{A_1} - c_{A_2})$$

در حالت دوم انتقال اجزای A و B با شدت مولی مساوی...

$$N_{AZ} = k'_{G}(P_{A_1} - P_{A_2}) = k'_y(y_{A_1} - y_{A_2}) = k'_c(c_{A_1} - c_{A_2}) = k'_x(x_{A_1} - x_{A_2}) = k'_L(c_{A_1} - c_{A_2})$$

در حالتی که برای گازها $F = \frac{D_{AB} \cdot P_t}{RTZ}$ و $k_G = \frac{D_{AB} \cdot P_t}{RTP_{BM}Z}$ می باشد.

و یا $F = k_G \cdot P_{BM}$

در حالتی که نفوذ متقابل دو جزء با شدت مولی مساوی انجام می گیرد، مقدار $N_A + N_B$ برابر با صفر بوده و در نتیجه سرعت متوسط فاز گاز نیز برابر با صفر می باشد و به این جهت در این حالت، ضریب عمومی F برای گازها برابر با k'_Y و برای مایعات برابر با k'_X می گردد.

ضرایب انتقال جرم در
حرکت آرام

انتقال جرم در حرکت آرام توسط مکانیزم نفوذ مولکولی انجام می گردد ، و در این گونه موارد به جای تعریف ضریب انتقال جرم و تعیین مقدار آن وجود ندارد.

روابط موجود بین ضریب انتقال جرم برای گازها

واحد ضریب	معادله شدت	
	نفوذ جزء A در جزء ساکن	نفوذ متقابل اجزاء با شدت مولی مساوی
مول بر زمان در سطح در فشار	$N_A = k_G \Delta P_A$	$N_A = k'_G \Delta P_A$
مول بر زمان در سطح در جزء مولی	$N_A = k_y \cdot \Delta y_A$	$N_A = k'_y \cdot \Delta y_A$
مول بر زمان در سطح در مول بر حجم	$N_A = k_C \Delta C_A$	$N_A = k'_C \Delta C_A$
جرم بر زمان در سطح در نسبت جرم A به جرم B	$W_A = k_Y \Delta Y_A$	

روابط موجود بین ضریب انتقال جرم برای مایعات

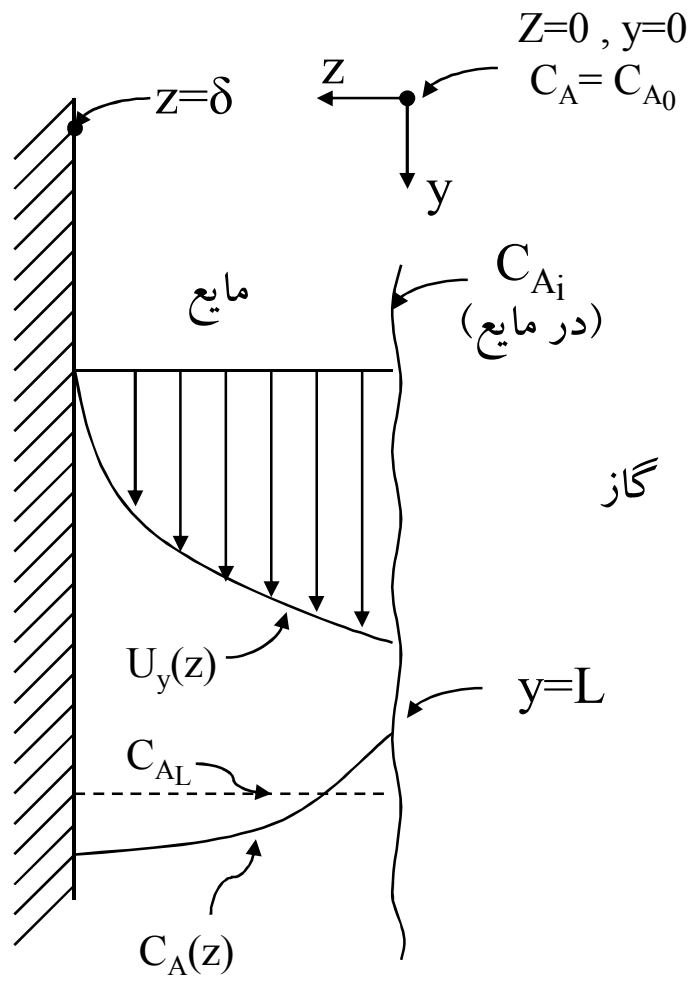
واحد ضریب	معادله شدت	
	نفوذ جزء A در جزء ساکن	نفوذ متقابل اجزاء با شدت مولی مساوی
مول بر زمان در سطح در مول بر حجم	$N_A = k_L \Delta C_A$	$N_A = k'_L \Delta C_A$
مول بر زمان در سطح در واحد جزء مولی	$N_A = k_x \cdot \Delta x_A$	$N_A = k'_x \cdot \Delta x_A$

روابط تبدیل ضریب انتقال جرم فاز گاز به یکدیگر :

$$F = k_G P_{BM} = k_y \frac{P_{BM}}{P_t} = k_C \frac{P_{BM}}{R T} = \frac{k_y}{M_B} = k'_G \cdot P_t = k'_y = k'_C \frac{P_t}{R T} = k'_C \cdot C_A$$

روابط تبدیل ضریب انتقال جرم مایعات به یکدیگر :

$$F = k_x x_{BM} = k_L x_{BM} C = k'_L \cdot C = k'_L \left(\frac{\rho}{M} \right) = k'_x$$



لایه مایع در حرکت آرام

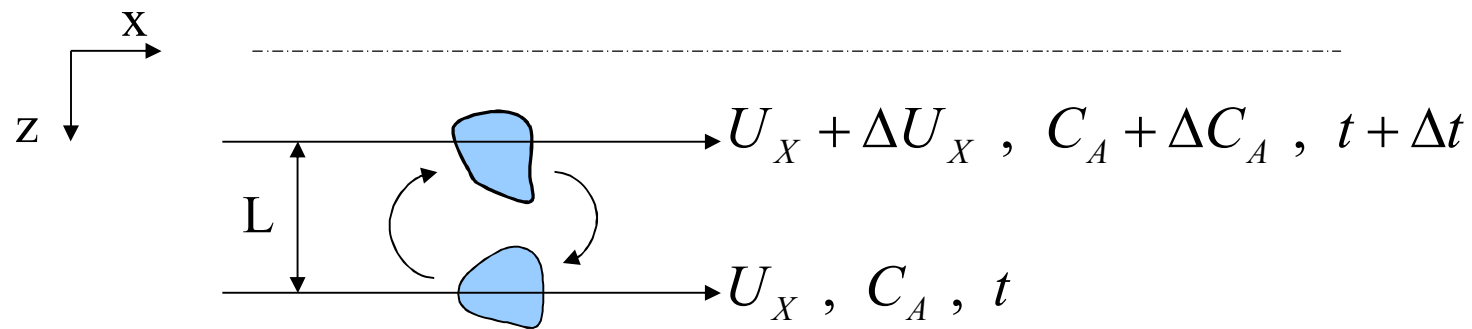
ضرایب انتقال جرم در حرکت درهم

حرکت سیالات در اکثر دستگاه‌های صنعتی در حالت درهم است. ولی متأسفانه به خاطر عدم آشنائی کامل به مکانیزم حرکت درهم، ضریب انتقال جرم به روش تحلیلی، به روشی که برای حرکت آرام امکان پذیر است، مقدور نمی باشد.

به منظور توجیه مکانیزم انتقال جرم در حرکت درهم، نظریه های مختلفی پیشنهاد گردیده است که در این میان نظریه لایه مؤثر (Film Theory)، نظریه تداخل (Penetration Theory)، نظریه جایگزین سطحی (Surface Theory) اشاره کرد.

نفوذ چرخانه ای
(Eddy Diffusion)

حرکت درهم به خاطر وجود حرکات نامنظم ذرات، قطعات و لخته های کوچک و بزرگ سیال که چرخانه نامیده می شود از حرکت آرام متمایز می باشد. حرکت چرخانه ها علاوه بر جهات مختلف در فضا در زمانهای مختلف نیز نامنظم است. به خاطر حرکت چرخانه ها اختلالاتی در مقدار سرعت سیال بوجود می آید.



فاصله اختلاط پیرانتل : L

$$\tau = -\mu \frac{du}{dz} \quad \text{برای جریان آرام}$$

$$\tau = -(\mu + \eta) \frac{du}{dz} \quad \text{برای جریان نا آرام}$$

$$\eta = -\rho l^2 \frac{du}{dz} \quad \text{ویسکوزیته گردابی}$$

μ : ویسکوزیته مولکولی سیال

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \quad \text{Shear Stress Velocity}$$

$$\begin{aligned} \tau &= -\left(\mu - \rho l^2 \frac{du}{dz}\right) \frac{du}{dz} = -\mu \frac{du}{dz} + \rho l^2 \left(\frac{du}{dz}\right)^2 = -\left[\mu - \rho l^2 \left(-\frac{du}{dz}\right)\right] \frac{du}{dz} = \\ &= -\left(\frac{\mu}{\rho} + E_v\right) \frac{d(u\rho)}{dz} = -(\nu + E_v) \frac{d(u\rho)}{dz} \end{aligned}$$

E_D مقداری است که بستگی به میزان درهم بودن حرکت یعنی شدت حرکت چرخانه ها در سیال دارد و در نتیجه بر حسب موضع سیال تغییر می کند. در حرکت درون یک کانال، در نزدیکی های دیواره به علت از بین رفتن چرخانه ها مقدار E_D در مقایسه با ν بسیار کوچک است و در نتیجه گرانیروی سینماتیک تعیین کننده مقدار انتقال مقدار حرکت می باشد. برعکس در نواحی نزدیک به وسط کانال، شدت حرکت چرخانه ها و میزان درهم بودن حرکت بیشتر و مقدار E_D در مقایسه با ν بسیار زیاد است و در نتیجه مقدار E_D تعیین کننده مقدار انتقال مقدار حرکت می باشد.

با توجه به تشابه پدیده های انتقال می توان نوشت:

$$J_A = -(D_{AB} + E_D) \frac{dC_A}{dz}$$

E_D : ضریب نفوذ جرم به خاطر حرکت درهم (ضریب نفوذ چرخانه ای)

نظیر آنچه در مورد ضرایب انتقال مقدار حرکت (E_D) گفته شد، در انتقال جرم نیز ضریب مولکولی در شرایط ثابت مقدار ثابتی بوده ، از نقطه ای به نقطه دیگر در داخل سیال تغییر نمی کند. در نزدیکی های دیواره یک کانال ، اثر D در انتقال جرم بیشتر از E_D می باشد در حالی که در نواحی وسط کانال ، به علت بیشتر بودن شدت حرکت درهم ، E_D عامل مهمتری برای انتقال جرم می باشد.

به همین ترتیب برای انتقال حرارت می توان نوشت:

$$q = -(\alpha + E_H) \cdot \frac{d(\rho C_p t)}{dz}$$

در نتایج آزمایشگاهی حاصل از حرکت سیالات معمولی در لوله ها ، نسبت های E_D/E_H و E_H/E_D بین 1.2 و 1.8 متغیر بوده ، دارای تغییرات موضعی است.

همان طور که برای پدیده های انتقال مولکولی نسبت ضرایب مولکولی دارای اهمیت ویژه ای می باشند ، در انتقال درهم نیز نسبت های ضرایب مربوطه دارای مفاهیم مهمی است. مثلاً ، مشابه با عدد اشمیت مولکولی $Sc = \nu / D_{AB}$ ، می توان عدد اشمیت مربوط به حرکت درهم را به صورت E_ν / E_D و یا عدد اشمیت کلی را به صورت $(\nu + E_\nu) / (D_{AB} + E_D)$ تعریف نمود. مقایسه نسبت ضریب کلی به ضریب مولکولی از نظر توجیه فیزیکی پدیده انتقال اهمیت زیادی دارد. این نسبت برای هر یک از سه

پدیده انتقال به قرار زیر است.

$$\frac{\nu + E_\nu}{\nu} = 1 + \frac{E_\nu}{\nu}$$

$$\frac{\alpha + E_H}{\alpha} = 1 + Pr \frac{E_H}{\nu}$$

$$\frac{D + E_D}{D} = 1 + Sc \frac{E_\nu}{\nu}$$

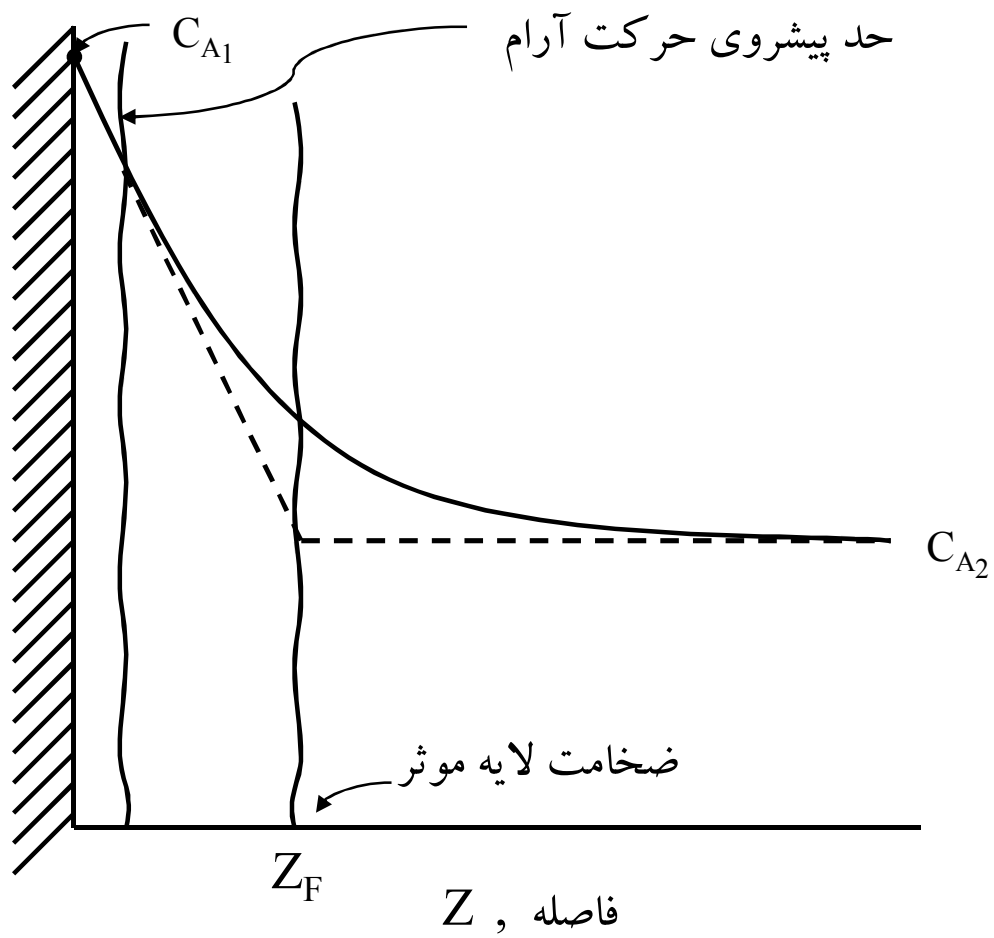
هر کدام از این نسبت ها نشان دهنده اهمیت نسبی حرکت درهم با حرکت آرام در یک عمل انتقال است. مثلاً در نزدیکی فصل مشترک سیال با یک سطح جامد، حرکت چرخانه ها بسیار خفیف و در نتیجه آن شدت حرکت درهم بسیار ضعیف است.

در حالت ویژه ای که $Pr = Sc = 1$ باشد ضریب کل انتقال برای هر سه پدیده انتقال مقدار حرکت ، حرارت و جرم یکسان بوده ، حرکات درهم اثرات مشابهی در هر سه پدیده انتقال خواهد داشت.

نظريه لايه مؤثر
Film Theory

این نظریه کهن ترین نظریه موجود برای پیش بینی ضریب انتقال جرم است. می دانیم که ضمن حرکت در هم سیالی از روی یک سطح جامد ، سرعت حرکت سیال در روی سطح جامد صفر و در نقاط نزدیک به آن بسیار آرام است به طوری که لایه ای با حرکت آرام در مجاورت صفحه جامد بوجود می آید. چنانچه بین صفحه جامد و سیال انتقال جرم صورت گیرد گرادیان غلظتی در داخل سیال تشکیل خواهد شد. انتقال جرم در این لایه تنها توسط نفوذ مولکولی اجزاء صورت می گیرد. قسمت دیگر تغییرات غلظت بین صفحه و سیال مربوط به نقاطی است که دارای حرکت درهم می باشد.

بنابر نظریه لایه موثر به جای اینکه تغییرات غلظت در مسیر انتقال جرم توسط منحنی واقعی نشان داده شود ، به وسیله تغییرات خطی در لایه ای به ضخامت Z_f نشان داده می شود. این تغییرات به صورت خطی چنین نشان داده شده است .



ضخامت لایه مؤثر به حدی است که مقاومت آن در قبال انتقال جرم مولکولی برابر با مقاومت واقعی این سیال در قبال انتقال جرم از سطح صفحه تا وسط سیال باشد. بر اساس نظریه لایه مؤثر در تمامی معادلات مربوط به انتقال جرم به جای Z باید از Z_f استفاده نمود. Z_f بستگی به نوع و شرایط جریان سیال دارد.

در نظریه لایه مؤثر ضرایب انتقال جرم F یا K تابع ضریب نفوذ به توان یک $(D_{AB}^{n=1})$ می باشد. از طرفی، نتایج آزمایشهای متعدد نشان داده است که در حرکت درهم این وابستگی درست نبوده، و ضریب انتقال جرم تابعی از D^n می باشد که n بر حسب شرایط مقداری بین صفر تا 0.8 و یا 0.9 را داراست. به این دلیل بجز در موارد استثنایی نظریه ساده لایه مؤثر مورد قبول نبوده، نتایج بدست آمده از آن مورد اطمینان نمی باشد.

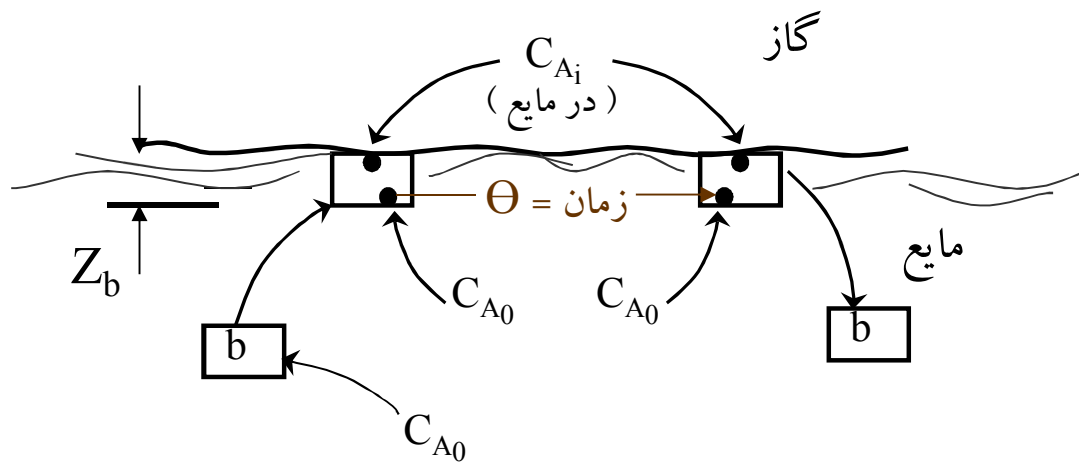
نظريه تداخل جرم

Penetration Theory

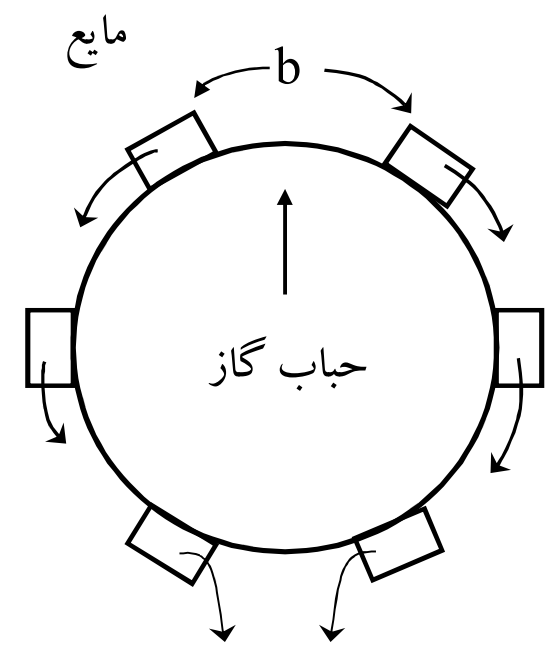
در بسیاری از موارد ، زمان تماس دو فاز به قدری کوتاه است که گرادیان غلظت برخلاف آنچه که لایه مؤثر پیش بینی می کند به حالت پایا نرسیده بلکه تابعی از زمان تماس می باشد. برای چنین مواردی هیگبی (Higbie) نظریه تداخل جرم را برای پیش بینی ضرایب انتقال جرم ابداع نمود.

* این نظریه زمانی به کار برده می شود که دو فاز در حال تماس هر دو سیال باشند.

به عنوان مثال حباب گازی که درون مایع ساکنی در حال صعود باشد را در نظر بگیرید. در حین حرکت حباب مقداری از گاز در درون مایع حل می شود. ذره ای از مایع مانند b که در فصل مشترک دو فاز بالای حباب قرار گرفته است. در حین حرکت حباب برای مدت زمانی برابر با θ در تماس با حباب باقی می ماند و در این مدت انتقال جرم بین ذره و گاز صورت می گیرد.



(ب)



(الف)

فرض می کنیم در ابتدا غلظت گاز حل شده در چرخانه هائی از مایع که دور از فصل مشترک قرار دارند برابر با مقدار ثابت C_{A0} باشد چنانچه یکی از این چرخانه ها در لحظه صفر به فصل مشترک دو فاز برسد ، غلظت در فصل مشترک گاز و مایع بلافاصله برابر C_{Ai} خواهد شد که برابر با حلالیت گاز در مایع است. در مدت زمان θ که این چرخانه در فصل مشترک باقی می ماند، انتقال جرم به صورت نفوذ مولکولی ناپایا بین گاز و چرخانه صورت می گیرد.

$$\frac{\partial C_A}{\partial \theta} = D_{AB} \cdot \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \quad B.C \begin{cases} C_A(0, \theta) = C_{A1} \\ C_A(\infty, \theta) = C_{A0} \end{cases}$$

$$I.C : C_A(z, 0) = C_{A0}$$

$$C_A = C_{A0} + (C_{Ai} - C_{A0}) \left(1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{z}{2}(\theta \cdot D_{AB})^{0.5}} e^{-\eta^2} d\eta \right)$$

$$N_{A,Z=0} = -D_{AB} \left(\frac{\partial C_A}{\partial z} \right)_{Z=0} = (C_{A_i} - C_{A_0}) \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi\theta}} \quad \Rightarrow$$

$$N_{A,M} = \frac{\int_0^\theta (C_{A_i} - C_{A_0}) \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi\theta}} d\theta}{\theta - 0} = 2 * (C_{A_i} - C_{A_0}) \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi\theta}} \quad \text{شار متوسط :}$$

$$N_A = k_L (C_{A_1} - C_{A_2})$$

$$k_{L,M} = 2 \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi\theta}}$$

ملاحظه مي شود كه مطابق نظريه تداخل جرم ، ضريب انتقال جرم متناسب با $D_{AB}^{1/2}$ مي

باشد .

نظریہ جایگزینی سطحی

Surface-Renewal Theory

این نظریه برای اولین بار توسط دانکورتز Danckwerts پیشنهاد گردید. مطابق با این نظریه ، فصل مشترک دو فاز از مجموعه چرخانه هائی تشکیل شده است که زمان تماس هر یک از آنها با فاز گاز مقدار متفاوتی است. از آنجا که میزان انتقال جرم بین گاز و یک چرخانه بستگی به زمان تماس دارد ، مقدار متوسط شار جرم برابر با مجموعه شارهای مربوط به چرخانه های جداگانه می باشد. چنانچه $\phi d\theta$ برابر با مجموعه مساحت موجود بین گاز و چرخانه هائی باشد که زمان اقامت آنها در فصل مشترک بین θ و $\theta + d\theta$ است. در این صورت سطح معادل با یک واحد برابر

$$\int_0^{\infty} \phi d\theta = 1 \quad \text{خواهد بود.}$$

$$N_{A,M} = (C_{A_i} - C_{A_0}) \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi\theta}} S e^{-S\theta} d\theta = (C_{A_i} - C_{A_0}) \sqrt{D_{AB}} \cdot S$$

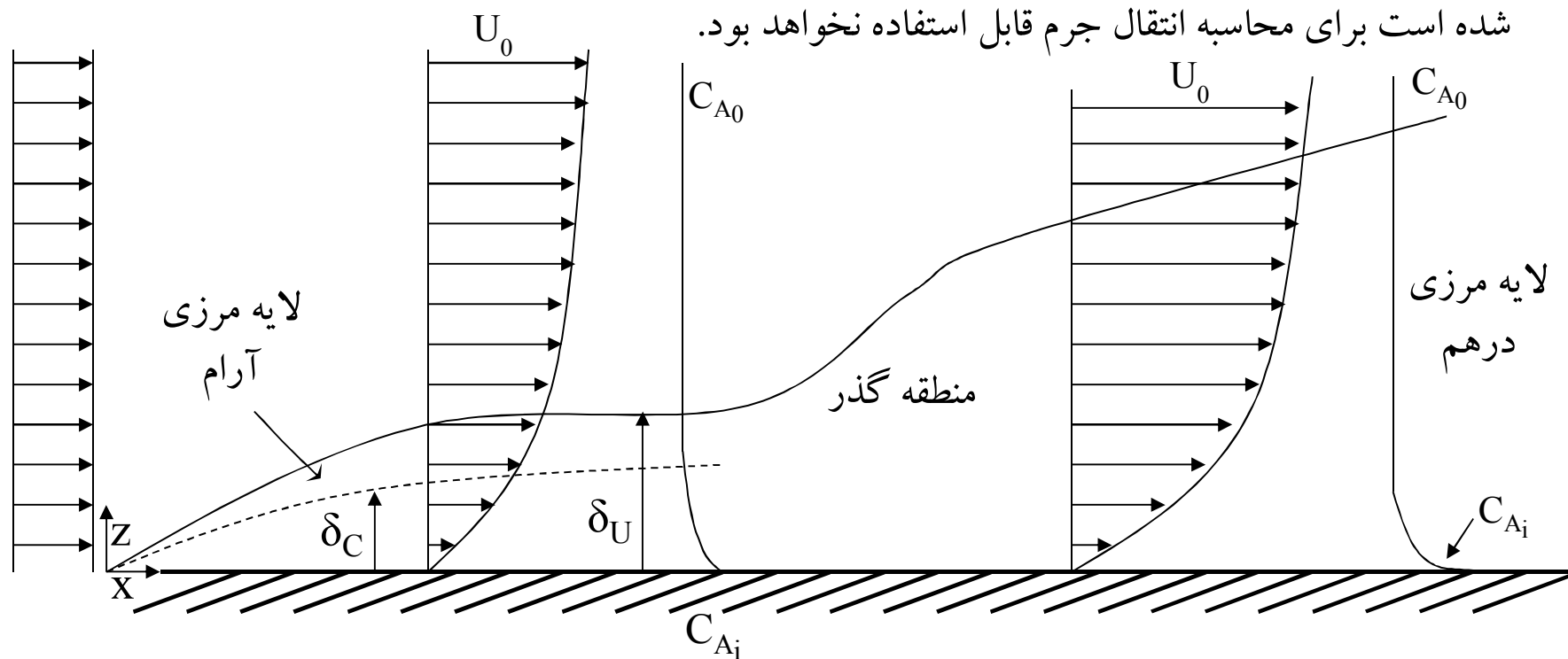
$$N_A = k_L (C_{A_1} - C_{A_2})$$

$$k_{L,M} = \sqrt{D_{AB}} \cdot S \quad \rightarrow \quad k_{L,M} \propto D_{AB}^{1/2}$$

جریان سیالات از روی سطوح
جامدات با لایه های مرزی
(Boundary Layers)

در انتقال جرم بین دو فاز سیال، به علت قابلیت تحرک سیالات، سرعت هر فاز در فصل مشترک معمولاً مقداری مخالف صفر است ولی در حالتی که یکی از فازها جامد باشد، سرعت در فصل مشترک الزاماً برابر با صفر بوده و بدین جهت نظریه های که بر اساس رسیدن چرخانه ها به فصل مشترک دو فاز وضع

شده است برای محاسبه انتقال جرم قابل استفاده نخواهد بود.



چنانچه سرعت u_0 زیاد باشد و در نتیجه عدد رینولدز صفحه $Re = \frac{\rho \cdot u \cdot x}{\mu} > 5 * 10^5$ شود، حرکت در لایه مرزی در هم خواهد بود.

تغییرات سرعت u_x و u_z در لایه مرزی آرام را می توان از طریق حل معادلات ناویر استوکس در جهات X و Z بدست آورد. در حالی که اگر جریان دارای حرکت درهم باشد باید از روش مبانی تقریبی برای بدست آوردن توزیع سرعت استفاده کرد. چنانچه حرکت سیال در درون لایه مرزی غلظت در حالت آرام باشد، می توان معادلات حرکت سیال و انتقال جرم را همزمان با هم حل کرده، توزیع غلظت لایه را بدست آورد. با داشتن این توزیع، می توان گرادیان غلظت در فصل مشترک را محاسبه کرد و ضریب انتقال جرم را تعیین نمود.

* در حالتی که اثر انتقال جرم بر توزیع سرعت سیال قابل چشم پوشی باشد و انتقال جرم از ابتدای صفحه تا نقطه ای به طول X در امتداد آن توسط رابطه زیر محاسبه می شود.

$$* Sh_M = \frac{K_{LM} x}{D_{AB}} = 0.664 Re_x^{1/2} SC^{1/3} \quad \text{عدد شرود (فقط برای جریان آرام):}$$

در نظریه های مربوط به لایه های مرزی می توان ثابت کرد نسبت ضخامت لایه مرزی سرعت δu ، به ضخامت لایه مرزی غلظت δc برابر با $Sc^{1/3} = \delta u / \delta c$ می باشد.

در معادله * ضریب انتقال جرم تابعی از $D_{AB}^{2/3}$ می باشد.

تشابهات موجود بین پدیده های
انتقال جرم، حرارت و مقدار حرکت

در حرکت آرام دو بعدی یک سیال از روی یک سطح جامد ، معادله دیفرانسیل حرکت (معادله ناویر

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \quad \text{استوکس) در جهت X ها:}$$

اگر در چنین سیستمی جزء A بین سطح جامد و سیال انتقال یابد؛ معادله دیفرانسیل توزیع غلظت این

جزء در سیال بدون وجود واکنش شیمیایی به قرار زیر خواهد بود:

$$u_x \frac{\partial C_A}{\partial x} + u_z \frac{\partial C_A}{\partial z} = D_{AB} \left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right)$$

به علاوه چنانچه انتقال حرارت نیز بین صفحه و سیال صورت گیرد، معادله دیفرانسیل درجه حرارت

$$u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad \text{سیال عبارت خواهد بود از:}$$

ملاحظه می شود که هر سه معادله شکل واحدی دارند و تفاوت ظاهری بین آنها از آن جهت است که U_X ، C_A و T و همچنین ضرایب نفوذ مقدار حرکت v ، جرم D_{AB} و حرارت α جایگزین یکدیگر شده اند.

متغیرهای سرعت و غلظت و حرارت را می توان به صورت بدون بعد نمایش داد.

$$\frac{u_x - (u_{x,z=0} = 0)}{u_0 - (u_{x,z=0} = 0)} = \frac{u_x}{u_0} \quad \text{سرعت بدون بعد :}$$

$$\frac{C_A - C_{Ai}}{C_{A0} - C_{Ai}} \quad \text{غلظت بدون بعد :}$$

$$\frac{T - T_i}{T_0 - T_i} \quad \text{دمای بدون بعد :}$$

مزیت بدون بعد کردن متغیرهای فوق در این است که با تعریف متغیرهای جدید شرایط مرزی معادلات فوق نیز شبیه یکدیگر می شود. مثلاً برای شکل صفحه قبل متغیرهای بدون بعد سرعت، غلظت و درجه حرارت در فصل مشترک سیال با صفحه ($Z=0$) همگی برابر با صفر و در نقاط بسیار دور از سطح صفحه ($Z=\infty$) همگی برابر با یک می باشد.

در صورت برابری ضرایب نفوذ انتقال $Pr=Sc=1$ ، توزیع متغیرهای بدون بعد عیناً معادل یکدیگر خواهد بود.

$$N_A = -D_{AB} \left(\frac{\partial C_A}{\partial Z} \right)_{Z=0} = K_L (C_{A_i} - C_{A_0})$$

$$q = -\alpha \left[\frac{\partial(\rho C_P T)}{\partial Z} \right]_{Z=0} = h(T_i - T_0)$$

$$\tau_i g_c = \nu \left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial Z} \right]_{Z=0} = \frac{f}{2} u_0 (\rho u_0 - 0)$$

$f =$ ضریب بدون بعد اصطکاک

$f \cdot u_0 / 2 =$ ضریب انتقال مقدار حرکت

حرکت درهم درون لوله های مدور

$$St_m = \frac{Nu_m}{Re \cdot Pr} = \frac{h_m}{c_p \bar{u}_x \rho}$$

رابطه فوق به جز در مواردی که Pr برابر یک است توافق نزدیکی با نتایج آزمایشی ندارد.

با آزمایشی که توسط کولبورن (Colburn) انجام گرفت به رابطه شکل زیر تعمیم یافت :

$$St_m = \frac{h_m}{C_p \bar{u}_x \rho} = \frac{0.5 f}{Pr^{2/3}}$$

که این رابطه که تشابه بین انتقال مقدار حرکت و انتقال حرارت را نشان می دهد به نام **تشابه کولبورن** معروف است.

چنانچه گروه بدون بعد بالا را برابر J_H فرض کنیم:

$$St_m \cdot Pr^{2/3} = \frac{h_m}{c_p \bar{u}_x \rho} Pr^{2/3} = J_H = \frac{1}{2} f = \psi(Re)$$

با استفاده از رابطه فوق می توان رابطه مشابهی برای انتقال جرم نوشت. این تشابه به نام « تشابه چیلتون کولبورن» (Chilton-Colburn) معروف است.

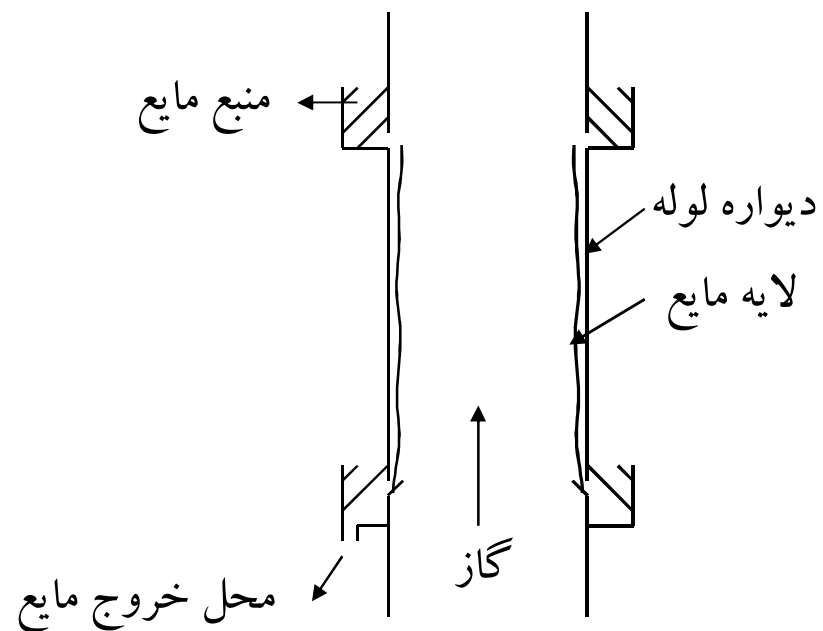
$$St_m \cdot Sc^{2/3} = \frac{sh_m}{Re \cdot Sc} Sc^{2/3} = \frac{F_m}{C \bar{u}_x} Sc^{2/3} = J_D = \frac{1}{2} f = \psi(Re)$$

ضریب اصطکاک در داخل لوله

$$5000 < Re < 200000 \Rightarrow \frac{1}{2} f = 0.023 Re^{-0.2}$$

:

برجهای جدااره مرطوب



برج جداره مرطوب

مایع فرار خالصی از دیواره های داخلی یک استوانه به سمت پایین در حرکت است در حالی که گازی در مرکز لوله از پایین به سمت بالا جریان دارد. با اندازه گیری میزان تبخیر مایع در گاز و دانستن اندازه سطحی که انتقال جرم از آن صورت می گیرد. ضرایب انتقال جرم در فاز گاز محاسبه می شود. با تغییر دادن نوع مایع و گاز می توان ضریب انتقال جرم را بدست آورد.

مثال: می خواهیم ضریب انتقال جرم را برای تبخیر آب از سطح مرطوب جسمی که دارای شکل هندسی خاصی بوده و گاز هیدروژن از روی آن عبور می کند تعیین نماییم. سرعت ظاهری هیدروژن هنگام عبور از روی جسم 50 ft/Sec ، فشار برابر جو و درجه حرارت 100°F است. برای این سیستم نتایج تجربی در دسترس نیست ولی در شرایط ذکر شده ضریب انتقال حرارت بین سطح جسم مزبور و هوا از رابطه تجربی زیر قابل محاسبه است.

$$h = 0.072 G'^{0.6} \frac{lb_m}{hr \cdot ft^2}$$

G' : سرعت جرمی بر حسب

با استفاده از رابطه اخیر ضریب انتقال جرم را برای شرایط مشابه تعیین

کنید
خواص فیزیکی مورد نیاز در 100°F و فشار جو به قرار زیر است.

نام	$\mu: Cp$	$\rho : \frac{lb_m}{ft^3}$	$C_p: \frac{BTU}{lb_m \cdot f}$	$D_{AB} : \frac{ft^2}{hr}$	$K: \frac{BTU}{ft \cdot f}$
هوا	0.0185	0.071	0.24	3	0.01576
هیدروژن	0.009	0.00495	3.45		0.1069

حل:

$$J_H = \frac{h_m}{c_p u \rho} \text{Pr}^{2/3} = \frac{h}{c_p G'} \text{Pr}^{2/3} = \psi(\text{Re})$$

داشتیم:

تابع $\Psi(\text{Re})$ باید طوری تعیین شود که با گروه $0.072G'^{0.6}$ هماهنگ باشد.

$$\psi(\text{Re}) = b \text{Re}^n$$

$$\text{Re} = \frac{\rho \cdot u \cdot d}{\mu} = \frac{G' \cdot L}{\mu}$$

$$\frac{h}{c_p G'} \text{Pr}^{2/3} = \psi(\text{Re}) = b \text{Re}^n \quad \Rightarrow \quad h = \frac{c_p G'}{\text{Pr}^{2/3}} b \text{Re}^n \quad \Rightarrow$$

$$h = \frac{b \cdot c_p}{\text{Pr}^{2/3}} G' \left(\frac{G' L}{\mu} \right)^n = \frac{b c_p}{\text{Pr}^{2/3}} \left(\frac{L}{\mu} \right)^n \cdot G'^{n+1}$$

$$\Rightarrow n+1=0.6 \rightarrow n=-0.4$$

$$h = 0.072 G'^{0.6}$$

$$\frac{bc_p}{\text{Pr}^{2/3}} \left(\frac{L}{\mu} \right)^{-0.4} = 0.072 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{0.072 \text{Pr}^{2/3}}{c_p} \left(\frac{L}{\mu} \right)^{0.4}$$

$$1c_p = 2.419 \frac{lb_m}{ft.hr} \quad \Rightarrow \quad \text{Pr} = \frac{c_p \mu}{K} = \frac{0.24(0.0185)(2.42)}{0.01576} = 0.681$$

$$b = \frac{0.072(0.681)^{2/3}}{0.24} \left(\frac{L}{0.0185(2.42)} \right)^{0.4} = 0.810 L^{0.4}$$

$$J_H = \frac{h}{c_p G'} \text{Pr}^{2/3} = b \text{Re}^n = 0.810 L^{0.4} \text{Re}^{-0.4} = \frac{0.810 L^{0.4}}{\text{Re}^{0.4}} = \psi(\text{Re})$$

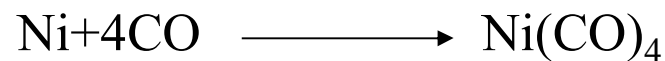
$$J_H = J_D \Rightarrow J_H = J_D = \frac{K_G P_{BM} M_M Sc^{2/3}}{\rho u} = \frac{0.810 L^{0.4}}{Re^{0.4}} = \psi(Re)$$

$$K_G P_{BM} = F = \frac{0.810 L^{0.4} \rho u}{Re^{0.4} M_M Sc^{2/3}} = \frac{0.810 (\rho u) L^{0.4}}{\left(\frac{\rho u L}{\mu}\right)^{0.4} M_M Sc^{2/3}} = \frac{0.810 (\rho u)^{0.6} \mu^{0.4}}{M_M Sc^{2/3}}$$

$$Sc = \frac{0.009(2.42)}{(0.00495)(3)} = 1.468$$

$$F = K_G P_{BM} = \frac{0.810 \left((0.00495) \left(50 \times \frac{3600 \text{ sec}}{\text{hr}} \right)^{0.6} \left((0.009)(2.42) \right)^{0.4} \right)}{(2.02) (1.468)^{2/3}} = 3.98 \frac{\text{lbmol}}{\text{hr} \cdot \text{ft}^2}$$

مثال: برای درست کردن $\text{Ni}(\text{CO})_4$ گاز CO از درون بستری از گلوله های که روی نیکل ، قطر 0.5 فوت عبور داده می شود سطح مقطع بستر یک فوت مربع و فضای خالی آن 30 درصد حجم بستر است گاز CO خالص در 50 درجه سانتی گراد و فشار یک جو با شدت 15 lbmol/hr از بالای بستر وارد می شود.



در شرایط موجود می توان فرضیات زیر را صادق دانست:

1- واکنش شیمیایی بسیار سریع انجام می گیرد، به طوری که می توان غلظت را در سطح نیکل همواره برابر با صفر فرض کرد. کربنیل بدست آمده به صورت گاز است و به محض تشکیل شدن به سمت توده گازی درون بستر جریان دارد ، نفوذ می کند. بدین ترتیب شدت واکنش با توجه به شدت انتقال CO به سطح نیکل و انتقال $\text{Ni}(\text{CO})_4$ از سطح نیکل به توده گاز کنترل می شود.

2- درجه حرارت و فشار در همه نقاط ثابت و به ترتیب برابر 50 درجه سانتی گراد و یک جو است.

3- گرانی گاز برای تمام نقاط برابر با 0.024 Cp و عدد اشیت در تمام نقاط داخل بستر برابر با 2 می باشد.

4- اندازه گلوله های نیکل تغییر محسوسی نمی نماید.

با توجه به فرضیات فوق ارتفاع بستری را که بتواند غلظت CO را در گاز خروجی به 0.5 درصد کاهش دهد پیدا نماید.

A = CO گاز $\Rightarrow N_B = -\frac{N_A}{4}$ **حل:**
B = Ni(CO)₄ گاز

$$\frac{N_A}{N_A + N_B} = \frac{N_A}{N_A - \frac{N_A}{4}} = \frac{N_A}{\frac{3}{4}N_A} = \frac{4}{3}$$

$$N_A = \frac{4}{3} F \operatorname{Ln} \frac{4/3 - 0}{4/3 - y_A} = \frac{4}{3} F \operatorname{Ln} \frac{4}{4 - 3y_A} \quad \frac{\text{lbmol}}{\text{hr} \cdot \text{ft}^2}$$

فرض می‌کنیم شدت جریان مولی گاز در نقطه‌ای که فاصله‌اش از بالای بستر z است برابر با G از سطح مقطع بستر باشد. در این صورت شدت جریان گاز CO در این نقطه برابر $G y_A$ خواهد بود. اگر سطح ویژه گلوله‌های نیکل برابر $\frac{\text{lbmol}}{\text{hr} \cdot \text{ft}^2}$ بستر باشد مجموعه سطوح گلوله‌های نیکل که در عنصر هندسی فوق وجود دارند برابر با $a dz$ خواهد بود. هرگونه تغییر غلظت جز A در این عنصر هندسی به خاطر وجود شار NA ایجاد می‌شود به طوری که می‌توان نوشت:

$$d(y_A \cdot G) = -N_A \cdot a \cdot dz$$

$$N_A = -\frac{d(y_A \cdot G)}{a \cdot dz}$$

به ازای هر مول CO که مصرف می شود یک چهارم مول $\text{Ni}(\text{CO})_4$ بوجود می آید.
 در نتیجه به ازای هر مول CO که ترکیب می شود سه چهارم مول از تعداد مولهای گاز موجود در بستر کم می شود. چنانچه G_0 شدت مولی جریان CO هنگام ورود به بستر باشد تعداد مولهای CO که در طول فاصله ای برابر با Z از بالای بستر ترکیب شده و از بین رفته است برابر $\frac{4}{3}(G_0 - G)$ و شدت جریان CO در این نقطه برابر با $\left[G_0 - \frac{4}{3}(G_0 - G) \right]$ می باشد بنابراین در این نقطه :

$$y_A = \frac{G_0 - \frac{4}{3}(G_0 - G)}{G} \quad \Rightarrow \quad G y_A = G_0 - \frac{4}{3}G_0 + \frac{4}{3}G \quad \Rightarrow$$

$$G \left(y_A - \frac{4}{3} \right) = G_0 \left(1 - \frac{4}{3} \right) \quad \Rightarrow \quad G \left(y_A - \frac{4}{3} \right) = -\frac{G_0}{3} \quad \Rightarrow$$

$$G \left(\frac{4}{3} - y_A\right) = \frac{G_0}{3} \quad \Rightarrow \quad G = \frac{\frac{G_0}{3}}{\frac{4}{3} - y_A} \quad \Rightarrow$$

$$G = \frac{G_0}{4 - 3y_A} \quad \Rightarrow \quad G y_A = \frac{G_0 y_A}{4 - 3y_A} \quad \Rightarrow$$

$$d(G y_A) = d\left(\frac{G_0 y_A}{4 - 3y_A}\right) \quad \Rightarrow$$

$$d(G y_A) = \frac{d y_A G_0 (4 - 3y_A) - (-3G_0 y_A) d y_A}{(4 - 3y_A)^2} = \frac{4G_0 d y_A}{(4 - 3y_A)^2}$$

داشتیم :

$$N_A = -\frac{d(y_A G)}{a dz} \quad \& \quad N_A = \frac{4}{3} F \text{Ln} \frac{4}{4-3y_A}$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d(y_A G)}{a dz} &= \frac{4}{3} F \text{Ln} \frac{4}{4-3y_A} \\ d(G y_A) &= \frac{4 G_0 d y_A}{(4-3y_A)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\frac{4 G_0 d y_A}{(4-3y_A)^2 a dz} = \frac{4}{3} F \text{Ln} \frac{4}{4-3y_A}$$

ضریب انتقال جرم F که خود تابعی از y_A است را می توان از جدول 3-3 بدست آورد (ردیف پنجم)

ابتدا باید عدد رینولدز را محاسبه نمود و برای این کار نیاز به محاسبه G' (یعنی شدت جریان جرمی گاز در مقطع بستر خواهد بود) یا به عبارتی شار جرمی $G' \frac{lbmol}{hr.ft^2}$ ، پس ابتدا ضروری است که از روی شار مولی موجود و جرم مولکولی هر یک از گاز ها شار جرمی را محاسبه نمائیم. شار جرمی CO برابر خواهد بود با:

$$28[G_0 - \frac{4}{3}(G_0 - G)]$$

و شدت جریان جرمی (شار جرمی) $Ni(CO)_4$ برابر با $170.7[G_0 - \frac{1}{3}(G_0 - G)]$ می

باشد. در نتیجه شدت جریان جرمی گاز:

$$G' = (47.6G_0 - 19.6G) \frac{lbm}{hr.ft^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} G' = 47.6G_0 - 19.6G \\ G = \frac{G_0}{4 - 3y_A} \end{array} \right\} \Rightarrow G' = 47.6G_0 - \frac{19.6G_0}{4 - 3y_A} = G_0 \left(47.6 - \frac{19.6}{4 - 3y_A} \right)$$

برای گلوله های نیکل به قطر 0.5" یا $d_p = 0.0416'$ است ($0.5"/12 = 0.0416'$)

$$\text{Re}'' = \frac{G' \cdot d_p}{\mu} = 0.0416 G_0 \left(\frac{47.6 - 19.6 / (4 - 3y_A)}{(0.024)(2.42)} \right) = G_0 \left(34.2 - \frac{14.06}{4 - 3y_A} \right)$$

به علت اینکه y_A از بالا تا پایین بستر بین 1 و 0.005 تغییر می کند و $G_0 = 15 \frac{lbmol}{hr.ft^2}$ است

$$\text{If } y_A=1 \quad \Rightarrow \quad Re''=302$$

$$\text{If } y_A=0.005 \quad \Rightarrow \quad Re''=416$$

پس مطابق جدول 3-3 خواهیم داشت:

$$J_D = \frac{F}{G} Sc^{2/3} = \frac{2.06}{\varepsilon} Re''^{-0.575}$$

از آنجایی که $sc = 2$ و $\varepsilon = 0.3$ می باشد ضریب انتقال جرم F برابر خواهد بود با

$$J_D = \frac{F}{G} Sc^{2/3} = \frac{2.06}{\varepsilon} Re''^{-0.575} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{2.06G}{\varepsilon Sc^{2/3}} Re''^{-0.575}$$

$$\text{Re}'' = G_0 \left(34.2 - \frac{14.06}{4-3y_A} \right) \Rightarrow F = \frac{2.06}{0.3} \left(\frac{G_0}{(2)^{2/3}} \right) \left(\frac{G_0}{4-3y_A} \right) \left[G_0 \left(34.2 - \frac{14.06}{4-3y_A} \right) \right]^{-0.575}$$

$$F = \frac{136.67}{4-3y_A} \left[34.2 - \frac{14.06}{4-3y_A} \right]^{-0.575}$$

از طرفی داریم: $-\frac{4G_0 dy_A}{(4-3y_A)^2 a dz} = \frac{4}{3} F \text{Ln} \frac{4}{4-3y_A} \Rightarrow$

$$a = \frac{6(1-\varepsilon)}{d_p} = \frac{6(1-0.3)}{0.0416} = 101 \frac{\text{ft}^2}{\text{ft}^3}$$

$$-\frac{4 \times 15}{101} \frac{dy_A}{(4-3y_A)^2 dz} = \frac{4}{3} \frac{136.67}{4-3y_A} \left[34.2 - \frac{14.06}{4-3y_A} \right]^{-0.575} \text{Ln} \frac{4}{4-3y_A} \Rightarrow$$

$$\frac{d y_A}{(4-3 y_A) dz} = 30.68 \left[34.2 - \frac{14.06}{4-3 y_A} \right]^{-0.575} \text{Ln} \frac{4}{4-3 y_A}$$

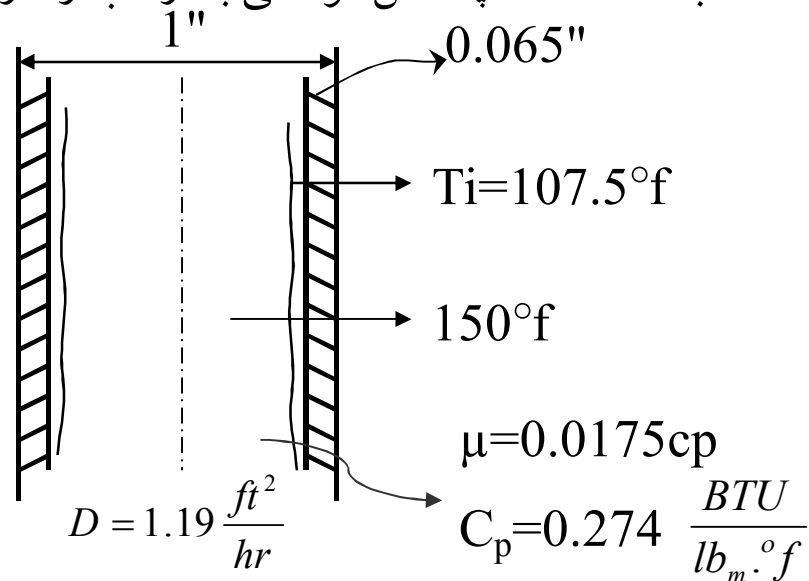
$$z = \int_0^z dz = -0.0325 \int_1^{0.005} \frac{[34.2 - 14.06 / (4 - 3 y_A)]^{-0.575}}{(4 - 3 y_A) \text{Ln} 4 / (4 - 3 y_A)} dy_A$$

مقدار انتگرال فوق را باید به طریقه ترسیمی معین کرد با رسم کردن منحنی آن بر حسب y_A و تعیین مساحت زیر منحنی در فاصله 0.005 تا 1 ارتفاع بستر برابر با 0.475 فوت حاصل می شود. بنابراین برای اینکه غلظت CO در گاز خروجی از بستر به 0.5% کاهش یابد باید بستری که ارتفاع آن حدود 6 اینچ است استفاده نمود.

مثال : مخلوطی از هوا و بخار آب در لوله قائم مسی به نظر خارجی 1" به سمت بالا در حرکت است. ضخامت دیواره لوله 0.065 است. سطح خارجی این لوله توسط جریان آب سرد خنک می شود و در نتیجه بخار آب در داخل لوله چگالیده شده، به صورت لایه مایعی از جدار داخلی لوله پایین می آید. در سطح مقطعی از لوله سرعت متوسط گاز 15ft/s و درجه حرارت متوسط آن 150°f، فشار آن یک جو و فشار بخار جزئی آب در توده 0.24 جو اندازه گیری شده است اگر درجه حرارت در فصل مشترک برابر با 107.5°f باشد، شدت چگالش موضعی بخار آب را در داخل لوله در این محل پیدا کنید.

H₂O : A

Air : B



حل: قطر داخل لوله مسی، d برابر است با

$$d = 1 - (0.065)(2) = 0.87'' = 0.0725'$$

$$N_B = 0 \Rightarrow \frac{N_A}{N_A + N_B} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

$$y_{A_1} = \frac{P_{A_1}}{P_t} = \frac{0.24}{1} = 0.24$$

$$y_{A_2} = \frac{P_{A_2}}{P_t} \xrightarrow{@ T=107.5^\circ F \rightarrow P_A=0.0806 \text{ atm}} y_{A_2} = 0.0806$$

$$M_M = \sum y_i M w_i = (0.24)(18.02) + (1 - 0.24)(29) = 26.4$$

$$\rho = \frac{PM}{RT} = \frac{1 * 26.4}{(0.73)(150 + 460)} = 0.0594 \frac{lb_m}{ft^3}$$

$$\mu = 0.0175 (2.42) = 0.0424 \frac{lb_m}{ft.hr}$$

$$Sc = \frac{\mu}{\rho \cdot D_{AB}} = \frac{0.0424}{(0.0594)(1.19)} = 0.6$$

$$G' = \rho u = (15)(3600)(0.0594) = 3205 \frac{lb_m}{ft^2.hr} \quad \text{G': سرعت جرمی گاز}$$

$$G = \frac{G'}{M_M} = \frac{3205}{26.4} = 121.5 \frac{lb_{mol}}{ft^2.hr} \quad \text{G: سرعت مولی گاز}$$

$$Re = \frac{d \cdot G'}{\mu} = \frac{(0.0725)(3205)}{0.0424} = 5490$$

$$Table 3.3 \Rightarrow J_D = St \cdot Sc^{2/3} = \frac{F}{G} \cdot Sc^{2/3} = 0.023 Re^{-0.17}$$

$$F = \frac{0.023 G \text{Re}^{-0.17}}{Sc^{2/3}} = \frac{0.023 * (121.5)(5490)^{-0.17}}{(0.6)^{2/3}} = 0.91 \frac{lb_{mol}}{ft^2 \cdot hr}$$

$$N_A = F \ln \left[\frac{P_t - P_{A_2}}{P_t - P_{A_1}} \right] = 0.91 \ln \left[\frac{1 - 0.086}{1 - 0.24} \right] = 0.168 \frac{lb_{mol}}{ft^2 \cdot hr}$$

پایان فصل ۳