بررسی انتقال جرم در خارج کره صلب در شرایط یکنواخت_ محیط اطراف کاملا ساکن است.

کره‌ای به شعاع R در نظر بگیرید. انتقال جرم از کره به اطراف صورت میگیرد.

_ کره میتواند، کره جامد یا کره سیال صلب (همچون جامد) باشد.

_ شرایط عملیاتی دما و فشار ثابت است.

_ سیستم را دو جزئی در نظر گرفتیم. (برای سادگی کار)

_ فقط انتقال جرم از کره به اطراف صورت میگیرد

انتقال جرم را فقط در جهت شعاع در نظر میگیریم.

$$N_{Ar} = J_{Ar} + x_A (N_{Ar} + N_{Br})$$

$$N_{Br} = 0$$

فرض، غلظت کل ثابت است.

$$N_{Ar} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dr} + x_A N_{Ar}$$

$$N_{Ar} = -\frac{D_{AB}}{1-X_A} \frac{dC_A}{dr} = -\frac{D_{AB}\, C}{C-C_A} \frac{d\, C_A}{dr}$$

$$x_A = \frac{C_A}{C}$$

N_{Ar} فلاکس جزء A متغیر اما دبی انتقال جرم ثابت و برابر است با:

$$\dot{m_A} = N_{Ar}\, S_r\, M_A\big|_{r\geq R} = \text{ثابت} \qquad , \qquad S_r = 4\pi r^2$$

$$= -\frac{D_{AB}\ C}{C-C_A}\, 4\pi r^2\, M_A \frac{dC_A}{dr}$$

$$\dot{m_A}\frac{dr}{r^2} = -\frac{D_{AB}\ C}{C-C_A}\, 4\pi M_A\, dC_A$$

بررسی شرایط مرزی: (BC_S)

غلظت روی سطح: (BC_1) $\qquad r = R \qquad , \qquad C_A = C_{AS} = C_A^*$

غلظت درنقطه‌ای به فاصله r از مرکز کره: (BC_2) $\qquad r = r\ (r>R) \qquad , \qquad C_A = C_A$

با اعمال شرایط مرزی:

$$\dot{m_A} = \frac{4\pi\ D_{AB}\ C M_A\ rR}{r-R} \ln\frac{C-C_A}{C-C_{AS}}$$

رابطه فوق، دبی جرمی از کره‌ای به شعاع R به نقطهای به فاصله r از مرکز کره را میدهد.

رابطه $\dot{m_A} = N_{Ar}\, S_r\, M_A\big|_{r\geq R} = cte$ در حالت یکنواخت، بدون هیچ واکنش شیمیایی:

$$N_{Ar}\, S_r\, M_A\big|_r - N_{Ar}\, S_r\, M_A\big|_{r+\Delta r} = 0$$

$$S_R = 4\pi r^2$$

$$-\frac{d(N_{Ar}\ r^2)}{dr} = 0 \quad \text{یا} \quad N_{Ar}\, r^2 = cte$$

$$N_{Ar}\, 4\pi r^2\, M_A\big|_{r\geq R} = \text{ثابت} = \dot{m_A}$$

مثال: انتقال جرم از کره‌ای به شعاع R به نقطه‌ای به فاصله R ۲۰ از مرکز کره صورت می‌گیرد. مطلوبست مقدار عددی عدد شروود (طبق تعریف عدد شروود (Sh) برابر است با $Sh=\frac{Fd}{CD_{AB}}$ و $F= K_C C_{B,M}$ که $C_{B,M}$ متوسط لگاریتمی غلظت جزء B در مرز ۱و۲ ، $C_{B,M}=\frac{C_{B_2}-C_{B_1}}{\ln\frac{C_{B_2}}{C_{B_1}}}$ و d قطر کره است. در خصوص عدد شروود بعدا بیشتر بررسی خواهیم نمود.)

در خارج کره – تمامی فرضیات لازم نوشته شود.

حل: با توجه به روابط روابط فوق الذکر و تمامی فرضیات ذکر شده داریم:

$$\dot{m_A} = N_{Ar} S_r M_{A\ r\geq R} = \frac{4\pi M_A D_{AB} C r R}{r-R} \ln\frac{C-C_A}{C-C_{AS}}$$

از طرفی مقدار رفلاکس جرم از سطح کره به محیط اطراف را بصورت حاصلضریب k_c(ضریب انتقال جرم) در نیروی محرکه ΔC نیز می‌توان تعریف کرد.

فلاکس جرم از سطح کره به محیط اطراف

$$N_{Ar\ \ r=R} = k_c \Delta C = k_c (C_{AS} - C_A)$$

$$\dot{m_A}_{\ r=R} = N_{Ar} S M_{A\ r=R} = k_C (C_{AS} - C_A) 4\Pi R^2 M_A$$

از تساوی دو رابطه فوق:

$$\frac{4\pi M_A D_{AB} Cr R}{r-R} \ln\frac{C-C_A}{C-C_{AS}} = k_C (C_{AS} - C_A) 4\Pi R^2 M_A$$

$$C_A + C_B = C_{AS} + C_{BS} = C = \text{غلظت کل}$$

با جایگذاری مقدار m_A

$$-\frac{4\pi\, M_A\, D_{AB}\, Cr\, R}{r-R}\ln\frac{C-C_A}{C-C_{AS}} = 4\pi\rho_A R^2\frac{dR}{d\theta}$$

$$r \geq R \quad , \quad 0 \leq \theta \leq \theta \quad , \quad R_{\text{اولیه}} \leq R \leq R_\theta$$

$$\theta = \frac{\rho_A}{D_{AB}\, CM_A \ln\frac{C-C_A}{C-C_{AS}}}\left[\frac{1}{2}\left(R^2 - R_\theta^2\right) - \frac{1}{3r}\left(R^3 - R_\theta^3\right)\right]$$

این رابطه زمان لازم برای تغییر شعاع از R به R_θ وقتی انتقال جرم در شرایط یکنواخت و از سطح کره به نقطه‌ای به فاصله r از مرکز کره صورت می‌گیرد را نشان می‌دهد

مثال: قطره آبی به قطر ۰.۱ اینچ را در فضای ساکن هوا و در دمای ۸۰°F و فشار اتمسفر و با مقدار رطوبت ۰.۰۱۰۳۶ اتمسفر در نظر بگیرید. چه مدت طول می‌کشد تا قطره آب تبخیر شود.

آب : A هوا: B

حل:

$$R_\theta = 0 \quad , \quad r>>R \quad , \quad C = \frac{P_t}{RT} \quad , \quad C_A = \frac{P_A}{RT}$$

$$N_{Br} = 0 \quad , \quad 2R = 0.1 \text{ اینچ}$$

این رابطه برای حالت r>>R به صورت زیر ساده می‌شود: $= \frac{\rho_A}{D_{AB}\, CM_A \ln\frac{C-C_A}{C-C_{AS}}}\left[\frac{1}{2}\left(R^2 - R\theta^2\right) - \frac{1}{3r}\left(R^3 - R\theta^3\right)\right]\theta$

$$\theta = \frac{\rho_A R^2}{2D_{AB}\, CM_A \ln\frac{C-C_A}{C-C_{AS}}}$$

به لحاظ تبخیر آب و کاهش دمای آن به دمای بالاتر (با استفاده از منحنی رطوبت، دمای سطح $T = 60^\circ F$) لذا:

P_{AS} = فشار بخار در دمای سطح $(T = 60^\circ F) = 0.01743\ atm$

ضریب نفوذ در دمای متوسط لایه ($\frac{60+80}{2} = 70^\circ F$) بدست میآید.

$$D_{AB\ (T=70^\circ F)} = D_{H2O-Air} = 1.01\ \frac{ft^2}{hr}$$

$$\rho_A = 62.43 \frac{lb}{ft^2} \quad , \quad C = \frac{P_t}{RT} = \frac{(1)}{(0.73)(460+70)}$$

بنابراین:

$$\theta = \frac{(62.43)(0.73)(\frac{0.05}{12})(460+70)}{(2)(1.01)(1)(18)(\frac{1-0.01036}{1-0.01743})} = 1.61hr$$

مثال: اطراف یک قطعه جامد کاتالیستی کروی با لایهء گازی پوشیده شده است. این لایهء گازی همچون یک تیغه‌ی کروی یا قطر داخلی r_1 و قطر خارجی r_2 می‌باشد. مطلوبست:

الف: تغییرات غلظت جزء A که از درون تیغه کروی از سطح ۱ به ۲ در شرایط یکنواخت در حال انتقال می‌باشد.

ب: دبی انتقال جرم را در تیغه بدست آورید.

ج: اگر تیغه کروی به صورت غیرایزوترم عمل نماید به طوری که رابطه $\frac{T}{T_1} = (\frac{r}{r_1})^{n}$ در تیغه حاکم باشد، دبی انتقال جرم در این حالت چقدر خواهد بود؟

حل: لایه انتقال جرم گازی است. از حرکت توده‌ای درون لایه صرف نظر نمی‌کنیم.

$$N_{Ar} = J_{Ar} + x_A (N_{Ar} + N_{Br})$$

$$N_{Br} = 0 \quad , \quad N_{Ar} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dr} + x_A N_{Ar}$$

$$N_{Ar} = - C D_{AB} \frac{1}{1-X_A} \frac{dx_A}{dr}$$

واکنش شیمیایی در لایه گازی نداریم و شرایط یکنواخت است.

$$N_{Ar} S\big|_r - N_{Ar} S\big|_{r+\Delta r} = 0$$

$$\frac{d}{dr}(r^2 N_{Ar}) = 0$$

$$\frac{d}{dr}(- r^2 \frac{CD_{AB}}{1-x_A} \frac{dx_A}{dr}) = 0$$

تغییرات غلظت در لایه

$$\left[\frac{x_{B1}}{x_{B2}}\right] = \left[\frac{x_{B2}}{X_{B1}}\right]^{\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}}$$

ب:

$$\dot{m}_A = M_A N_{Ar} S_{\ r\geq r1} = M_A N_{Ar} 4\pi r_1^2 \ _{r=r1}$$

$$N_{Ar\ r=r1} = - CD_{AB} \frac{1}{1-X_A} \frac{dX_A}{dr}\Big|_{r=r1}$$

از تغییرت غلظت بر حسب r، مقدار $\frac{dX_A}{dr}$ را در نقطه $r = r_1$ بدست آورده و در رابطه فوق قرار میدهیم.

$$\dot{m}_A = \frac{4\pi\ CD_{AB}\ M_A}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \ln \frac{X_{B2}}{X_{B1}}$$

رابطه فوق به راحتی از رابطه زیر قابل دستیابی است.

$$\dot{m}_A = N_{Ar} \bar{S}_{av} M_A$$

$$N_{Br} = 0 \quad , \quad N_{Ar} = \frac{N_{Ar}}{N_{Ar} + N_{Br}} \frac{D_{AB}\ C}{\delta} \ln \frac{\frac{N_{Ar}}{N_{Ar}+N_{Br}} - X_{A2}}{\frac{N_{Ar}}{N_{Ar}+N_{Br}} - X_{A1}}$$

$$\delta = r_2 - r_1$$

$$N_{Ar} = \frac{D_{AB}\ C}{r_2 - r_1} \ln \frac{1-X_{A2}}{1-X_{A1}}$$

$$N_{Ar} = \frac{D_{AB}\ C}{r_2 - r_1} \ln \frac{1-X_{B2}}{1-X_{B1}}$$

$$\bar{S}_{av} = 4\Pi r^2 = 4\Pi r_1 r_2$$

$$\dot{m}_A = \frac{4\Pi r_1 r_2\ CD_{AB}\ M_A}{r_2 - r_1} \ln \frac{X_{B2}}{X_{B1}}$$

ج: در صورت غیر ایزوترم بودن لایه، با توجه به رابطه ضرایب نفوذ با دما در گازها داریم:

$$\frac{D_{AB}}{D_{AB1}} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{3n}{2}}$$

$$\frac{d}{dr}\left(\mathrm{r}^2 \frac{CD_{AB1}}{1-X_A}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{3n}{2}} \frac{dX_A}{dr}\right) = 0$$

$$m_A^{\cdot} = 4\pi r_1^2 \, \mathrm{M_A} \, \mathrm{N_{Ar}}\big|_{\mathrm{r=r1}} = \frac{4\pi\left(\frac{PD_{AB}}{RT_1}\right)\left(1+\frac{n}{2}\right)}{r_1^{-1\frac{n}{2}} - r_2^{-1\frac{n}{2}}(r_1)^{\frac{n}{2}}} \ln\frac{X_{B2}}{X_{B1}}$$