نفوذ و انتقال جرم در شرایط غیریکنواخت

۲-۴ انتقال جرم درون کره در حالت غیریکنواخت (کره جامد، کره مایع یا حباب کروی صلب)

جرم ورودی− جرم خروجی± جرم تولیدی و مصرفی =تجمع جرمی

فرض: انتقال از کره به بیرون صورت می‌گیرد. با توجه به عدم واکنش شیمیایی درون کره: (A جزء انتقالی است)

$$\dot{m}_{A1} - \dot{m}_{A2} = \frac{\mathrm{dm_A}}{\mathrm{d\theta}}$$

$$m_A = (M_A V C_A)|_{\text{المان}}،\ \ V = 4\pi r^2 \Delta r \text{ حجم المان}$$

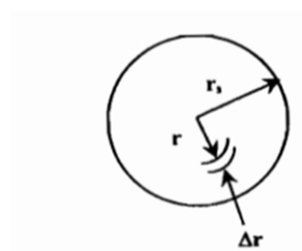
$$\frac{\mathrm{dm_A}}{\mathrm{d\theta}} = M_A 4\pi r^2 \Delta r \frac{dC_A}{\mathrm{d\theta}}$$

$$\dot{m}_{A1} = (M_A 4\pi r^2 N_{Ar})|_r \quad ، \dot{m}_{A2} = (M_A 4\pi r^2 N_{Ar})|_{r+\Delta r}$$

$$(M_A 4\pi r^2 N_{Ar})|_r - (M_A 4\pi r^2 N_{Ar})|_{r+\Delta r} = M_A 4\pi r^2 \Delta r \frac{dC_A}{\mathrm{d\theta}}$$

$$-\left[\frac{\partial (r^2 N_{Ar})}{\partial r}\right] = r^2 \frac{\partial C_A}{\partial \theta}$$

$$-\left(2\mathrm{r} N_{Ar} + r^2 \frac{N_{Ar}}{\partial r}\right) = r^2 \frac{\partial C_A}{\partial \theta}$$



از حرکت بالک صرف‌نظر می‌شود، لذا:

$$N_{\mathrm{Ar}} = J_{\mathrm{Ar}} + x_{\mathrm{A}} \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} N_{\mathrm{ir}} = -D_{\mathrm{AB}} \frac{\partial C_A}{\partial \mathrm{r}}$$

سیستم دو جزئی (A , B) در نظر گرفته شده و از انتقال اجزاء بیرون کره به درون کره صرف نظر شده است.

$$\frac{\partial N_{Ar}}{\partial \mathrm{r}} = -D_{\mathrm{AB}} \frac{\partial^2 C_A}{\partial \mathrm{r}^2}$$

$$\left(2\mathrm{r}D_{\mathrm{AB}} \frac{\partial C_A}{\partial \mathrm{r}}\right) + \mathrm{r}^2 \left(D_{\mathrm{AB}} \frac{\partial^2 C_A}{\partial \mathrm{r}^2}\right) = \mathrm{r}^2 \frac{\partial C_A}{\partial \theta}$$

و یا:

$$\frac{\partial C_A}{\partial \theta} = D_{\mathrm{AB}} \left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial \mathrm{r}^2} + \frac{2}{\mathrm{r}} \frac{\partial C_A}{\partial \mathrm{r}}\right)$$

شرایط مرزی و اولیه:

غلظت solute (جزء A) در کلیهٔ نقاط درون کره در لحظهٔ شروع انتقال جرم، یکسان و مساوی C_{A_0} است.

$$IC \qquad \begin{matrix} r = r \\ 0 \le r \le r_s \end{matrix} \qquad \theta = 0 \qquad C_A = C_{A_0}$$ یا $$C_A(r, 0) = C_{A_0}$$

از مقاومت در فاز مداوم صرف‌نظر می‌شود. لذا غلظت جزء A در سطح کره (فصل مشترک دو فاز) ثابت و برابر با $C_{\mathrm{A}}^{\mathrm{f}}$ (غلظت در حال تعادل با فاز مداوم) است.

$$BC_1 \qquad \theta = \theta \quad , \qquad r = r_s \quad , \qquad C_A = C_{\mathrm{A}}^{\mathrm{f}} \quad \text{یا} \quad C_A(r_s, \theta) = C_{\mathrm{A}}^{\mathrm{f}}$$

فرض بر آن است که نفوذ فقط در جهت r وجود دارد، تغییرات غلظت در جهات θ و φ وجود ندارد. خصوصیات فیزیکی با توجه به مقدار انتقال جرم کم، تقریباً ثابت فرض می‌شود و غلظت در مرکز کره تا حد محدودی تغییر خواهد کرد. یا:

$$BC_2 \qquad \lim_{\mathrm{r}\to 0} C_A(r,\theta) = \quad \text{محدود}$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها، معادلهٔ PDE را حل میکنیم (جزئیات حل در ضمیمهٔ ۴-۱).

$$y(r,\theta) = C_A - C_{\mathrm{A}}^{\mathrm{f}}$$

$$BC_1 \qquad y(r_s,\theta) = 0$$

$$BC_2 \qquad \lim_{\mathrm{r}\to 0} y(r,\theta) = 0 \quad \text{محدود}$$

$$IC \qquad y(r,0) = C_A - C_{\mathrm{A}}^{\mathrm{f}}$$

روش جداسازی متغیرها:

$$y(r,\theta) = R(r)T(\theta)$$

$$R(r) = \frac{C_2}{r}\sin\left(\frac{n\pi r}{r_s}\right) \qquad , \qquad n = 1,2,\ldots$$

$$T(\theta) = C_1 \exp(-\lambda^2 D\theta) \qquad , \qquad \lambda = \frac{n\pi}{r_s}$$

بنابراین

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{1}{r}\sin\left(\frac{n\pi r}{r_s}\right)\exp\left(\frac{Dn^2\pi^2\theta}{r_s^2}\right)$$

با توجه به آنچه در سری فوریه داریم، (در $\theta = 0$ به سری فوریه میرسیم)

$$\theta = 0$$

$$r\left(C_{A_0} - C_A^f\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi r}{r_s}$$

$$f(r) = r\left(C_{A_0} - C_A^f\right)$$

$$A_n = \frac{2}{r_s}\int_0^{r_s} r(C_{A_0} - C_A^f)\sin\frac{n\pi r}{r_s}\,dr = \frac{2r_s}{n\pi}(C_{A_0} - C_A^f)(-1)^{n+1}$$

$$C_A - C_A^f = \frac{2r_s}{\pi}(C_{A_0} - C_A^f)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{1}{r}\sin\frac{n\pi r}{r_s}\exp\left(\frac{-Dn^2\pi^2\theta}{r_s^2}\right)$$

رابطهٔ فوق غلظت جزء A درون کره را در هر لحظهٔ $\theta = \theta$ و در فاصله r از مرکز کره خواهد داد.

دستیابی به غلظت متوسط a درون کره در طول زمان θ

جرم خروجی از سطح در لحظه $\theta = M_A A_r N_{Ar}\Big|_{\substack{r=r_s\\ \theta=\theta}} = -4M_A\pi r_s^2 D_{AB}\frac{\partial C_A}{\partial r}\Big|_{\substack{r=r_s\\ \theta=\theta}}$

با استفاده از رابطه بدست آمده (تغییرات غلظت بر حسب θ, r)

$$\frac{\partial C_A}{\partial r}\Big|_{\substack{r=r_s\\ \theta=\theta}} = -\frac{2}{r_s}(C_{A_0} - C_A^f)\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(\frac{-Dn^2\pi^2\theta}{r_s^2}\right)$$

جرم خروجی از سطح در لحظه $\theta = -4M_A\pi r_s^2 D_{AB}\left(-\frac{2}{r_s}\right)(C_{A_0} - C_A^f)\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(\frac{-Dn^2\pi^2\theta}{r_s^2}\right)$

و حال کل جرم انتقالی از کره در طول زمان θ

$$N'_{\mathrm{A}} = \int_0^{\theta} \mathrm{M_A} 4\pi r_s^2 N_{Ar}\Big|_{\substack{r=r_s\\ \theta=\theta}} d\theta$$

$$= \mathrm{M_A} 4\pi r_s^2 \int_0^{\theta} N_{Ar}\Big|_{\substack{r=r_s\\ \theta=\theta}} d\theta = \mathrm{M_A}\frac{8r_s^2}{\pi}(C_{A_0} - C_A^f)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(1 - \exp\frac{-Dn^2\pi^2\theta}{r_s^2})$$

توجه کنید: فرض شده قطر کره r_s ثابت باشد (اگر مقدار solute کم و یا انتقال جرم کم صورت گیرد فرض صحیح است).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

از طرفی اگر پس از طول مدت زمان θ غلظت درون کره به غلظت متوسط $\overline{C}_{\mathrm{A}}$ رسیده باشد، می‌توان گفت:

$$\text{کل انتقال جرم صورت گرفته} = N'_{\mathrm{A}} = \mathrm{M_A}\left(\frac{4}{3}\pi r_s^2\right)(C_{A_0} - \overline{C}_{\mathrm{A}})$$

که $\overline{C}_{\mathrm{A}}$ غلظت متوسط درون کره در لحظه θ است. از تساوی دو مقدار N'_{A} داریم:

$$\frac{C_{A_0}-\overline{C}_{\mathrm{A}}}{C_{A_0}-C_A^f}=1-\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\exp\left(-\frac{Dn^2\pi^2\theta}{r_s^2}\right)$$

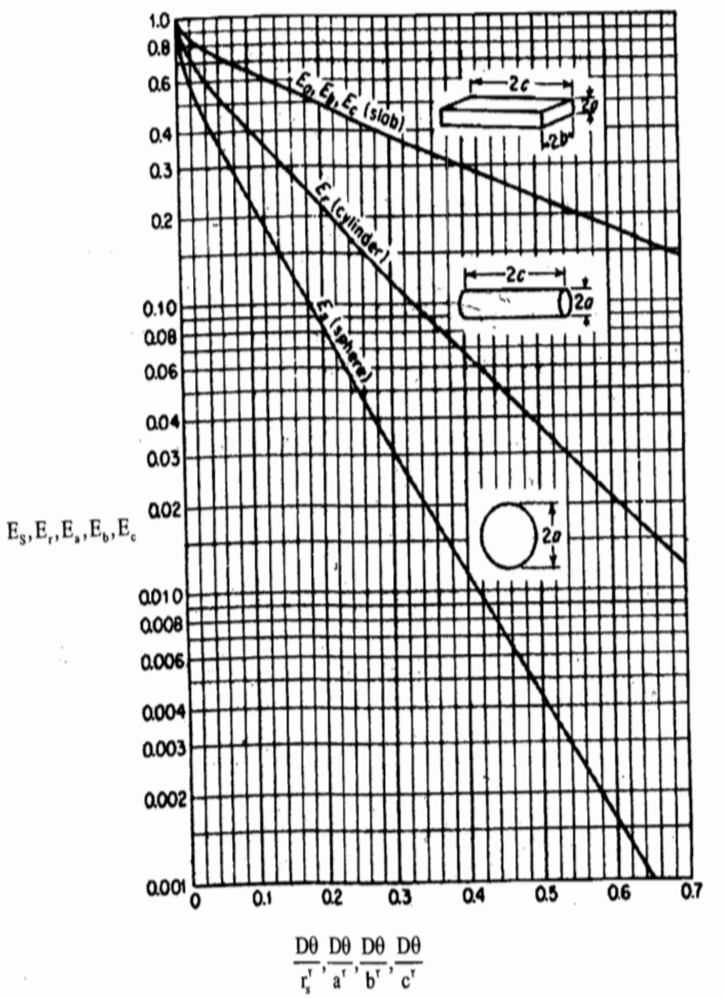
در رابطه فوق، انتقال جرم صورت گرفته در طول θ: $C_{A_0}-\overline{C}_{\mathrm{A}}$

حداکثر انتقال جرم ممکن $C_{A_0}-C_A^f$

با توجه به تعاریف فوق، راندمان انتقال جرم (مقدار انتقال جرم صورت گرفته به حداکثر انتقال جرم ممکن) قابل دستیابی است.

$$E=\frac{C_{A_0}-\overline{C}_{\mathrm{A}}}{C_{A_0}-C_A^f}$$

معادله نیومن
$$1-E=E_s=\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\exp\left(-\frac{Dn^2\pi^2\theta}{r_s^2}\right)$$



انتقال جرم درون کره، استوانه و تیغهٔ جامد در شرایط غیریکنواخت

$$C_A = C_{A_0} + \frac{r_s}{r}\left(C_A^f - C_{A_0}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left[erfc\,\frac{(2n+1)r_s - r}{2\sqrt{D\theta}} - erfc\,\frac{(2n+1)r_s + r}{2\sqrt{D\theta}}\right]$$

رابطه فوق غلظت جز A را در هر لحظه θ در فاصله r از مرکز کره می‌دهد.

ضریب نفوذAدر فاز مداوم $= D_{AC}\left[\frac{m^2}{s}\right]$

ثابت تعادلی (A بین دو فاز) = m

ضریب انتقال جرم بر مبنای فاز پراکنده

$$\frac{1}{K_d} = \frac{1}{k_d} + \frac{m}{k_c}$$

ضریب انتقال جرم بر مبنای فاز مداوم

$$\frac{1}{K_c} = \frac{1}{k_c} + \frac{1}{m\,k_d}$$

کل مقاومت در فاز پراکنده قرار میگیرد.

$$\frac{k_c}{m} \rightarrow \infty \quad \text{یا} \quad \frac{m}{k_c} \rightarrow 0$$

نفوذ و انتقال جرم در استوانهٔ جامد در حالت غیریکنواخت:

تجمع = جرم تولیدی و مصرفی ± جرم خروجی − جرم ورودی

$$M_A N_{Ar} A_r|_r - M_A N_{Ar} A_r|_{r+\Delta r} = M_A 2\pi r L \Delta r \frac{\partial C_A}{\partial \theta}$$

می‌توانیم غلظت متوسط را در طول زمان θ درون کره بدست آوریم.

$$\frac{C_{A_0}-\overline{C}_{\mathrm{A}}}{C_{A_0}-C_A^f}=6\sqrt{\frac{D\theta}{r_s^2}}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}+2\sum_{n=0}^{\infty} ierfc\,\frac{nr_s}{\sqrt{D\theta}}\right]-3\,\frac{D\theta}{r_s^2}$$

که:

$$ierfc\alpha=\int_{\alpha}^{\infty} erfc\theta d\theta=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp(-\alpha^2)-\alpha\,\mathrm{erfc}\alpha$$

$$\mathrm{erfc}\alpha=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\alpha}^{\infty}\exp(-\theta^2)\,d\theta=1-\mathrm{erf}\alpha$$

$$\mathrm{erf}\alpha=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\exp(-\theta^2)\,d\theta$$

$$Biot\ Number=\frac{k_\rho d}{D_{AC}m}$$

$k_\rho\left[\frac{m}{s}\right]=$ ضریب انتقال جرم فاز مداوم

$d[m]=$ قطر کره

عدم واکنش شیمیایی در لایهٔ انتقال جرم و استفاده از نفوذ مولکولی درون لوله (حرکت تودهای وجود ندارد)

$$A_r = 2\pi r L$$

$$-\frac{\partial (r N_{Ar})}{\partial r} = r\frac{\partial C_A}{\partial \theta}$$

سیستم را دو جزئی A و B در نظر میگیریم.

$$N_{Ar} = J_{Ar} = -D_{AB}\frac{\partial C_A}{\partial r}$$

$$r D_{AB}\frac{\partial^2 C_A}{\partial r^2} + D_{AB}\frac{\partial C_A}{\partial r} = r\frac{\partial C_A}{\partial \theta}$$

و یا:

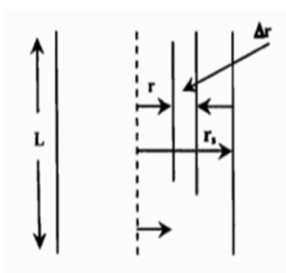
$$D_{AB}\left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial C_A}{\partial r}\right) = \frac{\partial C_A}{\partial \theta}$$

. اعمال شرایط مرزی و اولیه به شرح زیر و حل معادله دیفرانسیل PDE فوق به روش جداسازی متغیرها (ضمیمه ۴-۳) منجر به نتایج زیر می‌شود.

BC_1 $\quad C_A(r_s,\theta) = C_A^f \quad 0 \le \theta \le \theta$ غلظت روی سطح = غلظت در نقطه تعادل

BC_2 $\quad \lim_{r\to 0} C_A(r,\theta) =$ محدود یا $\left.\dfrac{\partial C_A(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r\to 0} = 0$

IC $\quad C_A(r,0) = C_{A_0} \quad 0 \le r \le s$



انتقال جرم از قطعه استوانه به فاز اطراف

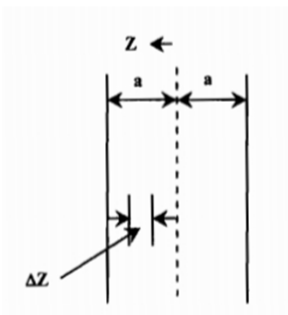
$$\frac{C_{A_0} - \bar{C}_A}{C_{A_0} - C_A^f} = 1 - \frac{4}{r_s^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\exp(-D\lambda_n^2\theta)$$

λ_n، ریشه‌های $J_0\left(\lambda_n r_s\right) = 0$ (که: $J_0\left(\lambda r\right)$ تابع بسل نوع اول درجه صفر است).

بنابراین مطابق آنچه در بررسی کره داشتیم، می‌توان نسبت $E = \frac{C_{A_0} - \bar{C}_A}{C_{A_0} - C_A^0}$ را راندمان انتقال جرم نیز تلقی نمود. امکان دستیابی به راندمان موضعی در موضعی خاص و یا غلظت در نقطه‌ای به فاصله r از مرکز استوانه و در هر لحظه $\theta = \theta$ میسر است (ضمیمه ۴-۳).

$$\frac{C_{A_0} - C_A}{C_{A_0} - C_A^f} = 1 - \frac{2}{r}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n r)} e^{-D_{AB}\lambda_n^2 \theta} \quad , \quad J_0(\lambda_n r) = 0$$

انتقال جرم درون تیغهٔ جامد در حالت غیریکنواخت:



تیغهٔ سطحی به ضخامت 2a در نظر بگیرید، انتقال جرم از بیرون به داخل تیغه و یا از داخل تیغه به بیرون صورت می‌گیرد. نمونهٔ واقعی اینگونه نفوذ را می‌توان در خشک کردن تیغه‌های مسطح درنظر گرفت.

با بیلان در لایهٔ انتقال جرم در شکل زیر (انتقال جرم از قطعه به بیرون صورت می‌گیرد) به معادلهٔ PDE می‌رسیم.

انتقال جرم از یک قطعه مسطح به بیرون

$$M_A S N_{AZ}|_Z - M_A S N_{AZ}|_{Z+\Delta Z} = S M_A \Delta Z \frac{\partial C_A}{\partial \theta}$$

انتقال جرم درون قطعه جامد فقط در اثر نفوذ مولکولی وجود دارد. لذا:

$$N_{AZ} = J_{AZ} = -D_{AB}\frac{\partial C_A}{\partial Z}$$

ادامهٔ رابطه بیلان جرمی درون تیغه،

$$-\frac{\partial N_{AZ}}{\partial Z} = \frac{\partial C_A}{\partial \theta}$$

$$D_{AB}\frac{\partial^2 C_A}{\partial Z^2} = \frac{\partial C_A}{\partial \theta}$$

شرایط مرزی و اولیه:

IC $\quad \theta = 0 \quad Z = Z \quad C_A = C_{A_0}$ یا $C_A(Z, 0) = C_{A_0}$

BC_1 $\quad \theta = \theta \quad Z = a \quad C_A = C_A^f$ یا $C_A(a, \theta) = C_A^f$

BC_2 $\quad \lim_{Z \to 0} C_A(Z, \theta) =$ محدود

به روش جداسازی متغیرها، PDE فوق را حل میکنیم. (جزئیات حل در ضمیمه ۴-۴)

$$y = C_A - C_A^f$$

$$y_\theta = \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial C_A}{\partial \theta} \quad , \quad y_z = \frac{\partial y}{\partial Z} = \frac{\partial C_A}{\partial Z} \quad , \quad y_{zz} = \frac{\partial^2 y}{\partial Z^2} = \frac{\partial^2 C_A}{\partial Z^2}$$

از بیلان جرم درون تیغه، $D_{AB}\, y_{zz} = y_\theta \quad , \quad y = y(Z, \theta)$

$$\text{IC} \qquad y\ (Z, 0) = C_{A_0} - C_A^f$$

$$\text{BC}_1 \qquad y(a, \theta) = 0$$

$$\text{BC}_2 \qquad \lim_{Z \to 0} y(Z, \theta) = \text{محدود}$$

جداسازی متغیرها، $y = Z(Z)T(\theta)$

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dZ^2} = \frac{1}{D_{AB}\, T}\frac{dT}{d\theta} = \text{ثابت} = C_1 = -\lambda^2$$

پس از دستیابی به مقدار T و Z و استفاده از سری فوریه، می‌توان نشان داد که (ضمیمه ۴-۴):

$$C_A - C_A^f + \frac{4}{\pi}\left(C_{A_0} - C_A^0\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos\frac{2n+1}{2a}\pi Ze$$

رابطهٔ فوق، غلظت جزء A را درون تیغه در نقطه‌ای به فاصلهٔ Z از مرکز تیغه و در لحظهٔ θ نشان می‌دهد.

انتقال جرم در هر لحظه از سطح تیغه
$$N_{AZ}\Big|_{\substack{Z=a\\ \theta=\theta}} = D_{AB}\frac{\partial C_A}{\partial Z}\Big|_{\substack{Z=a\\ \theta=\theta}}$$

کل انتقال جرم در طول زمان θ $= N' = \int_0^{\theta} N_{AZ} S M_A d\theta$

و اگر فرض کنیم پس از مدت زمان θ، غلظت درون تیغه به $\bar{C}_A$ رسیده باشد در این حالت،

$$N' = SM_A a(\bar{C}_A - C_{A_0})$$

و تساوی روابط فوق (برای 'N)

$$\frac{C_{A0}-\bar{C}_A}{C_{A0}-C_A^f}=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 D\theta}{4a^2}}$$

$$1-E=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 D\theta}{4a^2}}$$

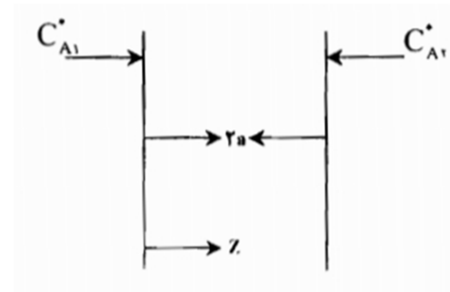
رسم تغییرات $1-E=E_\alpha$ به روش لاپلاس معکوس نیز ممکن بوده و جواب نهایی به صورت زیر قابل دستیابی است (جزئیات حل در ضمیمه ۴-۵).

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \mathrm{erfc}\frac{(2n+1)a-Z}{2\sqrt{D\theta}}+\frac{C_{A_0}-C_A}{C_{A_0}-C_A^f}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \mathrm{erfc}\frac{(2n+1)a+Z}{2\sqrt{D\theta}}$$

با دستیابی به مقدار انتقال جرم صورت گرفته در صول زمان θ می‌توان غلظت متوسط را در نقطه‌ای به فاصله Z از مرکز تیغه و در هر لحظه θ بدست آورد.

$$\frac{C_{A_0}-\bar{C}_A}{C_{A_0}-C_A^f}=2\sqrt{\frac{D\theta}{a^2}}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \mathrm{ierfc}\frac{na}{\sqrt{D\theta}}\right]$$

نکته ۱: در صورت تغییر شرایط دو طرف تیغه (که در انتقال جرم در صورت استفاده از غشاء صورت می‌گیرد) شرایط مرزی تغییر خواهد نمود.



انتقال جرم از درون تیغه با شرایط مرزی متفاوت در دو طرف تیغه

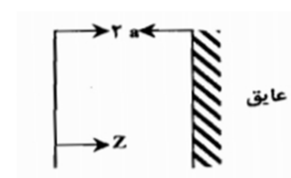
IC $\quad C_A(Z,0) = C_{A_0}$

BC₁ $\quad C_A(0,\theta) = C_{A1}^{0}$

BC₂ $\quad C_A(2a,\theta) = C_{A2}^{0}$

$$\frac{C_{A_0} - \bar{C}_A}{C_{A_0} - 0.5(C_{A1}^{f} + C_{A2}^{f})} = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2\theta}{4a^2}\right]$$

نکته ۲: در صورتیکه انتقال جرم فقط از یک طرف دیواره صورت گیرد طرف دیگر به گونه‌ای غیرقابل نفوذ باشد، شرایط مرزی به صورت زیر تغییر می‌کند.



انتقال جرم درون تیغه و از یک طرف تیغه

IC $\quad C_A(Z,0) = C_{A_0}$

BC₁ $\quad C_A(0,\theta) = C_{A1}^{f}$

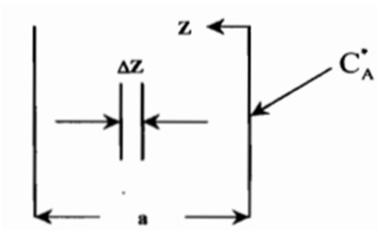
BC₂ $\quad \left.\frac{\partial C_A}{\partial Z}\right|_{\substack{Z=2a\\ \theta=\theta}} = 0$

بررسی انتقال جرم در تیغۀ جامد با فرض صادق بودن تئوری نفوذ عمقی (تئوری هگبی)

تیغۀ جامد به ضخامت a در معرض فاز سیال دیگری قرار دارد و انتقال جرم به درون قطعه صورت می‌گیرد. غلظت اولیه جزء خاص انتقالی درون قطعه، یکنواخت و برابر C_{A_0} است. نفوذ به کندی صورت می‌گیرد یا زمان تماس دو فاز فوق‌العاده کم است. در چنین حالتی، شرایط مرزی تئوری نفوذ عمقی (یا تئوری هگبی- اطلاعات بیشتر در این زمینه در فصل ۶ آمده است) می‌تواند صادق باشد. هیچگونه واکنش شیمیایی درون تیغه صورت نمی‌گیرد. با بیلان جرم برای جزء انتقالی (A) درون لایۀ نازک مطابق شکل زیرر داریم:

$$SM_A N_{AZ}|_Z - SM_A N_{AZ}|_{Z+\Delta Z} = SM_A \Delta Z \frac{\partial C_A}{\partial \theta} - \frac{\partial N_{AZ}}{\partial Z} = \frac{\partial C_A}{\partial \theta}$$

با توجه به عدم وجود حرکت بالک درون تیغه،



$$N_{AZ} = J_{AZ} = -D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial Z}$$

$$D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial Z^2} = \frac{\partial C_A}{\partial \theta}$$

شرایط مرزی و اولیه:

IC	$\theta = 0$	$Z = Z$	$C_A = C_{A_0}$	یا	$C_A(Z, 0) = C_{A_0}$
BC_1	$\theta = \theta$	$Z = 0$	$C_A = C_A^f$	یا	$C_A(0, \theta) = C_A^f$
BC_2	$\theta = \theta$	$Z = \infty$	$C_A = C_{A_0}$	یا	$C_A(\infty, \theta) = C_{A_0}$

حل معادلهٔ PDE فوق با شرایط مرزی و اولیه به روش combination یا substitution به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$C_A = C_A(Z, \theta) = C_A(\phi)$$

و آنگاه: $\phi = \frac{Z}{\theta^n}$

با دستیابی به مقادیر $\frac{\partial C_A}{\partial \theta}$ و $\frac{\partial^2 C_A}{\partial Z^2}$ و جایگذاری در PDE و دستیابی به مقدار n، $\left(n = \frac{1}{2}\right)$ نهایتاً معادله PDE به صورت یک معادله ODE درآمده و جواب نهایی به صورت زیر ارائه می‌شود.

$$\frac{C_A^f - C_A}{C_A^f - C_{A_0}} = 1 - E = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\phi^2} d\phi = \text{erf}\phi$$

که $\phi = \frac{Z}{\sqrt{4 D_{AB} \theta}}$ است و E راندمان انتقال جرم را نشان می‌دهد.

دستیابی به مقدار انتقال جرم صورت گرفته در هر لحظه و ضریب انتقال جرم

$$N_{AZ} = -D_{AB}\frac{\partial C_A}{\partial Z}\bigg|_{\substack{z=0\\ \theta=\theta}} = \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi\theta}}\left(C_A^f - C_A\right)$$

انتقال جرم متوسط صورت گرفته در طول زمان θ،

$$\bar{N}_{AZ} = \left(\int_0^\theta N_{AZ}\, d\theta\right)/\int_0^\theta d\theta = 2\sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi\theta}}\left(C_A^f - C_{A_0}\right)$$

این مقدار انتقال جرم متوسط صورت گرفته را می‌توان با استفاده از ضریب انتقال جرم متوسط و نیروی محرکه بیان نمود،

$$\bar{N}_{AZ} = \bar{k}_{av}\left(C_A^f - C_{A_0}\right)$$

از مقایسه دو مقدار فوق،

$$\bar{k}_{av} = 2\sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi\theta}}$$

حل معادله PDEفوق به روش لاپلاس معکوس نیز ممکن است (جزئیات حل در ضمیمه ٤-٧) و نتایج نهایی به صورت زیر ارائه شده است.

$$\frac{C_A - C_{A_0}}{C_A^* - C_{A_0}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \operatorname{erfc}\frac{(2n+1)a - Z}{2\sqrt{D\theta}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \operatorname{erfc}\frac{(2n+1)a + Z}{2\sqrt{D\theta}}$$

$$\frac{\bar{C}_A - C_{A_0}}{C_A^* - C_{A_0}} = E = 2\sqrt{\frac{D\theta}{a^2}}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \operatorname{ierfc}\frac{na}{\sqrt{D\theta}}\right]$$

نفوذ و انتقال جرم در قطعه جامد، در چند بعد و در حالت غیریکنواخت:

قطعه جامد مکعب مستطیل شکلی را در نظر بگیرید که ضخامت آن در جهت x و y نسبتاً زیاد است، لیکن می‌توان ضخامت جهت Z را نادیده گرفت. حال به بررسی انتقال جرم در چنین سیستمی در دو جهت x و y می‌پردازیم. می‌توان فرض کرد که انتقال جرم به درون قطعه یا از قطعه به بیرون صورت می‌گیرد. بنابراین تغییرات غلظت در دو جهت x و y با زمان وجود دارد پس می‌توان نوشت:

غلظت جزء A انتقالی، تابعی از x و y و θ است.

$$C_A = C_A(x,y,\theta)$$

فرض می‌شود:

$$C_A = C_{A1}(x,\theta)C_{A2}(y,\theta)$$

با توجه به آنچه که قبلاً نیز اشاره شد (بیلان جرمی در حالتی که انتقال جرم در یک بعد و براساس تئوری هگبی داشتیم):

$$D_{AB}\frac{\partial^2 C_{A1}}{\partial x^2}=\frac{\partial C_{A1}}{\partial \theta}$$

$$D_{AB}\frac{\partial^2 C_{A2}}{\partial y^2}=\frac{\partial C_{A2}}{\partial \theta}$$

اگر غلظت اولیه در قطعه جامد C_{A0} و غلظت در حال تعادل C_A^f باشد، با استفاده از روابط فوق‌الذکر و با جایگذاری لازم می‌توان نشان داد که، (جزئیات در ضمیمه ۴-۸)

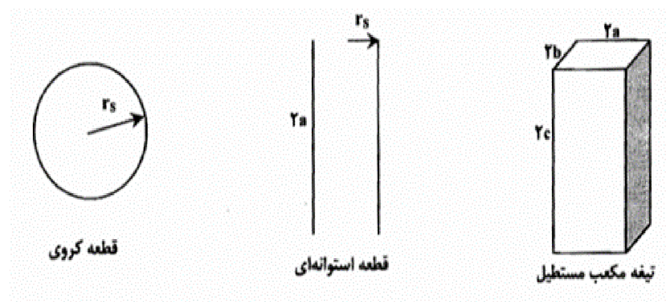
$$\underbrace{\frac{C_A-C_{A_0}}{C_A^f-C_{A_0}}}_{\text{راندمان کلی}}=\underbrace{\frac{C_{A1}-C_{A_0}}{C_A^*-C_{A_0}}}_{\text{راندمان انتقال جرم در جهت } x}\times\underbrace{\frac{C_A-C_{A_0}}{C_A^f-C_{A_0}}}_{\text{راندمان انتقال جرم در جهت } y}$$

بنابراین:

$$E_{\text{کل}}=E_x.E_y$$

راندمان در قطعات مسطح، استوانه‌ای و کروی

شکل قطعه	جهت انتقال جرم	E
کروی	از سطح خارجی	$E_{sph} = \mathrm{f}\left(\frac{D\theta}{r_s^2}\right)$
استوانه	فقط از سطح جانبی	$E_{cyl} = \mathrm{f}\left(\frac{D\theta}{r_s^2}\right)$
استوانه	از سطح جانبی و یکی از دو سطح بالایی یا پائینی	$\mathrm{E} = E_{cyl}.E_{slab} = f_1\left(\frac{D\theta}{r_s^2}\right).f_2\left(\frac{D\theta}{(2a)^2}\right)$
استوانه	از سطح جانبی و هر دو سطح بالا و پائین	$\mathrm{E} = E_{cyl}.E_{slab} = f_1\left(\frac{D\theta}{r_s^2}\right).f_2\left(\frac{D\theta}{a^2}\right)$
تیغه	از یک سطح (مثلاً سطح **bc**)	$\mathrm{E} = E_{slab} = \mathrm{f}\left(\frac{D\theta}{(2a)^2}\right)$
تیغه	از دو سطح (از دو سطح **bc** در دو طرف)	$\mathrm{E} = E_{slab} = \mathrm{f}\left(\frac{D\theta}{a^2}\right)$
تیغه	از چهار سطح (دو سطح **bc** و دو سطح **ac**)	$\mathrm{E} = E_{slab1}.E_{slab2} = f_1\left(\frac{D\theta}{a^2}\right).f_2\left(\frac{D\theta}{b^2}\right)$
تیغه	از ۶ سطح	$\mathrm{E} = E_{slab1}.E_{slab2}.E_{slab3}$ $= f_1\left(\frac{D\theta}{a^2}\right).f_2\left(\frac{D\theta}{b^2}\right).f_3\left(\frac{D\theta}{c^2}\right)$



مثال: خاک رنگ‌بر مورد استفاده در صنعت روغن خوراکی، حاوی مقداری روغن است. هدف جداسازی روغن موجود در این خاک با حلال تتراکلرواتیلن می‌باشد. روغن موجود در خاک $\frac{0.12kg}{\text{یک کیلو گرم خاک خشک}}$ گزارش شده است. استفاده از حلال خالص به مدت ۱.۵ ساعت مقدار روغن را در نمونه‌ای از خاک به $\frac{0.5kg}{\text{یک کیلو گرم خاک خشک}}$ کاهش داده است. خاک را کروی با قطر 2mm فرض نمایید. مطلوبست ضریب نفوذ موثر روغن در خاک رنگبر.

حل: فرض می‌کنیم با خروج روغن از خاک رنگبر، حجم خاک تغییر نکند،

غلظت روغن موجود در خاک (V حجم خاک)

$$C_A = \frac{m_A/M_A}{V}$$

$$\frac{\bar{C}_A - C_A^*}{C_{A_0} - C_A^*} = \frac{\bar{m}_A - m_A^*}{m_{A_0} - m_A^*} = \frac{\frac{\bar{m}_A}{m_B} - \frac{m_A^*}{m_B}}{\frac{m_{A_0}}{m_B} - \frac{m_A^*}{m_B}} = \frac{X_A - X_A^*}{X_{A_0} - X_A^*} = \frac{0.05 - 0}{0.12 - 0} = 0.417$$

با استفاده از شکل $\frac{D\theta}{r_S^2} = 0.042$

ضریب نفوذ موثر.

$$D_{eff} = 0.042 \times \frac{(2\times10^{-3}/2)^2}{1.5\times3600} = 7.78 \times 10^{-12}\ \frac{m^2}{s}$$

مثال: جریان هوا در $20\ ^\circ C$ با رطوبت بسیار کم و ثابت به دو سطح دیواره خاکی (خاک رس) وزیده می‌شود. رطوبت اولیه خاک، ۱۵ درصد و در سرتاسر خاک یکنواخت می‌باشد. ضخامت دیواره ۲ اینچ و لبه‌ها در مقابل انتقال جرم عایق‌بندی شده‌اند. سرعت خشک کردن توسط مکانیزم نفوذ رطوبت در دیواره کنترل می‌شود. مطلوبست ضریب نفوذ مؤثر رطوبت از خاک وقتی که رطوبت پس از ۳۷۵ دقیقه به ده درصد برسد. رطوبت تعادلی در شرایط دمای مسئله درون خاک رس ۲ درصد جرمی است. برای هریک از قطعات زیرین، مقدار رطوبت نهایی را پس از ۲۵ ساعت بدست آورید. رطوبت اولیه در قطعات زیرین همان مقدار ۱۵ درصد می‌باشد.

الف- قطعه کروی جامد با قطر ۶ اینچ.

ب- قطعه استوانه‌ای که دو قاعده آن در مقابل انتقال جرم غیرقابل نفوذ بوده و طول قطعه ۱۰ اینچ و قطر آن ۸ اینچ باشد.

ج- قطعه استوانه‌ای فوق‌الذکر اگر فقط یک قاعده آن عایق‌بندی شده باشد.

د- قطعه استوانه‌ای قسمت ب اگر هیچیک از قاعده‌های آن عایق‌بندی نشده باشد.

هـ- قطعه مکعب مستطیل شکل که دو انتهای آنها عایق‌بندی شده (شکل در زیر آمده است.)

و- قطعه مکعب مستطیل شکل که هیچیک از ابعاد آن عایق‌بندی نشده است.

حل: فرض می‌شود که آب رفتگی خاک در اثر کاهش رطوبت کم و لذا حجم جامد تغییر نکند.

$$\frac{\bar{C}_A - C_A^f}{C_{A_0} - C_A^f} = \frac{\bar{X}_A - X_A^f}{X_{A_0} - X_A^f}$$

$$X_{A_0} = \frac{0.15}{0.85} = 0.1765$$

$$X_A^F = \frac{0.02}{0.98} = 0.0204$$

$$\bar{X}_A = \frac{0.1}{0.9} = 0.111$$

$$E_f = \frac{0.111 - 0.0204}{0.1765 - 0.0204} = 0.58$$

از شکل ۴-۱:

$$\frac{D\theta}{a^2} = 0.135$$

$$\theta = 375\,\text{min} \qquad , \qquad 2a = 2''$$

$$D = \frac{0.135\left(\frac{1}{12}\right)^2}{\frac{375}{60}} = 1.5 \times 10^{-4}\,\frac{ft^2}{hr} \qquad \left(3.9 \times 10^{-4}\,\frac{m^2}{s}\right)$$

الف- قطعه جامد کروی

$$\frac{D\theta}{r_s^2} = \frac{1.5\times10^{-4}\times25}{\left(\frac{3}{12}\right)^2} = 0.06$$

$$\frac{\bar{X}_A - X_A^F}{X_{A_0} - X_A^F} = 0.345$$

$$\bar{X}_A = 0.0742$$

$$\bar{X}_A = \frac{\bar{X}_A}{1+\bar{X}_A} = 0.069$$

٪۶.۹ = درصد رطوبت نهایی

ب- شبیه روش حل مسئله در قسمت الف،

$$\frac{D\theta}{r_s^2} = \frac{1.5\times10^{-4}\times25}{\left(\frac{4}{12}\right)^2} = 0.0388$$

استفاده از شکل ۴-۱

$$E_{cyl} = 0.615$$

$$\bar{X}_A = (0.615)(0.1764 - 0.0204) + 0.0204 = 0.1164$$

$\bar{x}_A = 0.1043$ یا $\%10.43$

ج-

$$E = f_1\left(\frac{D\theta}{r_s^2}\right) f_2.\left(\frac{D\theta}{4a^2}\right) = E_{cyl}\,.\,E_{slab} \qquad 2a = 10''$$

$$\frac{D\theta}{(2a)^2} = \frac{1.5\times10^{-4}\times25}{\left(\frac{10}{12}\right)^2} = 5.4\times10 \xrightarrow{\text{شکل ۱۴}} E_{slab} = 0.92$$

$$E = 0.615\times0.92 = 0.566$$

$$\bar{X}_A = 0.566(0.1764-0.0204)+0.0204 = 0.1089$$

$\bar{x}_A = 0.0981$ یا $\%9.81$

د-

$$E = f_1\left(\frac{D\theta}{r_s^2}\right).\,f_2\left(\frac{D\theta}{(a)^2}\right) = E_{cyl}\,.\,E_{slab}$$

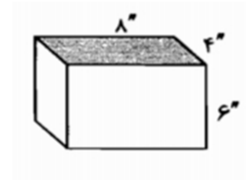
$$\frac{D\theta}{(a^2)} = \frac{1.5\times10^{-4}\times25}{\left(\frac{5}{12}\right)^2} = 0.0216 \longrightarrow E_{slab} = 0.83$$

$$E = 0.615\times0.83 = 0.51$$

$$\bar{X}_A = (0.5104)(0.1764-0.0204)+0.0204 = 0.1$$

$\bar{x}_A = 0.0909$ یا $\%9.09$

هـ



$$E = E_{\text{slab1}} \cdot E_{\text{slab2}}$$

$$2a = 4'' \qquad , \qquad 2b = 8''$$

$$\frac{D\theta}{(a^2)} = \frac{1.5 \times 10^{-4} \times 25}{\left(\frac{2}{12}\right)^2} = 0.135 \longrightarrow E_{\text{slab1}} = 0.58$$

$$\frac{D\theta}{(b^2)} = \frac{1.5 \times 10^{-4} \times 25}{\left(\frac{4}{12}\right)^2} = 0.0337 \longrightarrow E_{\text{slab2}} = 0.79$$

$E = 0.458$, $\bar{X}_A = 0.0917$ $\bar{x}_A = 0.084$ یا $\bar{x}_A = \%8.4$

و به روشی مشابه:

$E = E_{\text{slab1}} \cdot E_{\text{slab2}} \cdot E_{\text{slab3}} = 0.33$ یا $\bar{x}_A = 0.067$ یا $\bar{x}_A = \%6.7$